

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXV.

**I. Ueber die Wärmeentwicklung bei der Quellung
und Lösung der Colloide;
von E. Wiedemann und Ch. Lüdeking.**

Während die Vorstellungen über die Constitution von krystallwasserhaltigen Salzen und Lösungen derselben ziemlich entwickelt sind, ist dies bei den Colloiden nicht der Fall. Wir haben versucht, diesem Gegenstande dadurch etwas näher zu kommen, dass wir sowohl die Quellungswärme als auch die Lösungswärme der Colloide bestimmt haben. Die wasserfreien Colloide haben oft die Eigenschaft eine beträchtliche Menge Wassers aufzunehmen, ohne in den flüssigen Zustand überzugehen. Bei erhöhter Temperatur lösen sie sich dann zu einer klaren Flüssigkeit. Vereinzelte Versuche über die dabei auftretenden Wärmeprocesses lagen von Duvernoy¹⁾ vor, der indess nicht Quellung und Lösung voneinander getrennt hat. Zur Bestimmung der Lösungswärme liessen wir die Colloide erst durch längeres Liegen im Wasser vollkommen aufquellen.

Die Versuchsanordnung war die folgende.

Das Calorimeter bestand aus einem reagensglasähnlichen Gefässe aus dünnem Messing, von 18 ccm Capacität; in dieses wurde die zu untersuchende Substanz gebracht. An seinem oberen Ende wurde es durch eine ganz dünne durchbohrte Korkscheibe gehalten und an dieser mittelst Drähten frei in einem doppelwandigen Metallgefäss aufgehängt. Der doppelwandige Mantel desselben wurde mit Wasser von der Temperatur der umgebenden Luft gefüllt. Auf das Gefäss wurde ein Holzdeckel gelegt, der drei Durchbohrungen trug, durch welche drei Thermometer eingeführt waren. Ein Thermo-

1) Duvernoy, Chem. Centralbl. (8) 5. p. 428 u. 440. 1874.

meter tauchte in den Wassermantel, ein zweites in das Calorimeter, ein drittes endlich in das Aufquellungswasser, welches in einem Reagensglase enthalten war, das, ähnlich wie das Calorimeter und in dessen Nähe, im Wassermantelgefäß aufgehängt war. Der ganze Apparat wurde in dem Keller des hiesigen physikalisch-chemischen Laboratoriums aufgestellt, in dem die Temperaturschwankungen nur wenige Zehntelgrade während eines Tages betrugen. Die Temperatur des Wassers im Wassermantel blieb während der Dauer eines jeden Versuches ganz constant. Zu den Versuchen wurde das Colloid hierauf bis auf 5 mg genau in das Calorimeter eingewogen; meist wurden zwei Gramm benutzt, das Wasser wurde genau gemessen aus einer Bürette in das obenerwähnte Reagensglas eingefüllt. Der Apparat blieb stehen, bis die Thermometer gleiche Temperatur zeigten. Dann wurde der Deckel rasch gehoben, das Wasser aus dem Reagensglase in das Calorimeter gegossen, der Deckel schnell wieder aufgedeckt und das Ganze mittelst des Thermometers kräftig umgerührt. Das Uebergießen des Wassers nahm nur vier bis fünf Sekunden in Anspruch. Unmittelbar nach der Mischung wurde eine Secundenuhr in Bewegung gesetzt und von Minute zu Minute der Stand des Thermometers beobachtet. Zur Correction der beobachteten Temperatursteigerung wurde die Regnault'sche Methode angewandt.

Sollten die Versuche bei höheren Temperaturen ausgeführt werden, so wurde zunächst in ein Wasserbad, das auf der gewünschten Temperatur erhalten wurde, ein weites Messingrohr eingehängt und dann in diesem das Calorimeter befestigt; letzteres nahm nach kurzer Zeit fast die Temperatur des Wasserbades an. Die Auflösungsflüssigkeit wurde im Wasserbade selbst durch Einhängen eines damit gefüllten Reagensglases auf die gewünschte Temperatur gebracht und möglichst schnell in das Calorimeter eingegossen. Die Bestimmung der Auflösungswärme bei erhöhter Temperatur geschah auch in der Weise, dass die Substanz, in eine Glaskugel eingeschmolzen und in dem mit Wasser gefüllten Calorimeter erhitzt wurde und die Kugel bei der gewünschten Temperatur mittelst des Rührers zerdrückt und so die Reaction eingeleitet wurde.

Da es sich bei den obigen Versuchen wesentlich darum handelte, zu entscheiden, ob eine Wärmeentwicklung oder -Bindung stattfand, und ein ungefähres Urtheil über die Grösse derselben zu gewinnen, so sind die ermittelten Wärmemengen nur auf zwei Stellen angegeben; die dadurch gegebene Genauigkeit ist vollkommen genügend. Eine viel grössere dürfte sich auch kaum erreichen lassen. Einmal haben die Colloide meist nicht ganz constante Zusammensetzung, und ferner verläuft die Hydratation und Lösung äusserst langsam, wodurch alle Correctionen sehr gross werden.

Im Folgenden sind die numerischen Ergebnisse mitgetheilt. x ist die Menge des angewandten Colloides, y die Menge des benutzten Wassers in Gramm, t die beobachtete Temperaturerhöhung, C die einem Gramm Substanz entsprechende Wärmeentwicklung, berechnet unter Berücksichtigung der specifischen Wärme der Mischung.

Gelatine. — Es wurde Gelatine verwandt, wie sie in dünnen, farblosen Platten in den Handel kommt. Die Platten wurden zu den Versuchen in kleine Quadrate zerschnitten.

Die Versuche ergaben folgendes:

Temperatur 18,4°.			
$x = 2$	$y = 10$	$t = + 0,9$	$C = + 6,2$,
$x = 2$	$y = 10$	$t = + 0,8$	$C = + 5,3$,
$x = 2$	$y = 10$	$t = + 0,9$	$C = + 5,6$,

Im Mittel 5,7.

Die specifische Wärme der resultirenden Gallerte war 0,92.

Es ist also, wenn man Gelatine bei gewöhnlicher Temperatur mit Wasser aufquellen lässt, die Quellung von einer Wärmeentwicklung begleitet, die etwas weniger als sechs Grammc calorien pro Gramm beträgt.

Dem entsprechend zeigt sich, dass, wenn man gewässerte Gelatine mit Kochsalzlösung übergiesst, die ihr einen Theil des Wassers entzieht, eine Wärmebindung eintritt.

Es wurde nun Gelatine verwandt, die bereits durch Aufquellen Wasser aufgenommen hatte. Sie wurde auf 34° erhitzt, also nicht geschmolzen¹⁾, und ihr dann Wasser zugesetzt, sie löste sich.

1) Der Schmelzpunkt lag bei 35°.

Es fanden sich:

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0,3 \quad C = -3,4,$$

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0,4 \quad C = -4,1,$$

Im Mittel $-3,7$.

- Die Lösung der aufgequollenen Gelatine ist also mit einer Wärmeabsorption verbunden. Die Gelatine verhält sich also ganz analog, wie die sich hydratisirenden Salze, sie nimmt zunächst Wasser unter Wärmeentwicklung auf, sie hydratisirt sich. Bei der Lösung des Hydrats wird dagegen Wärme verbraucht. Zur weiteren Prüfung dieses Resultates wurde in der Weise vorgegangen, dass Gelatine von verschiedenem Wassergehalt mit Wasser übergossen wurde bei Temperaturen, die in jedem Falle einer raschen Lösung angemessen waren, ohne dass Schmelzung vorher eintreten durfte. Das totale Quantum Wasser war in jedem Experiment 10 g. Folgendes sind die Resultate:

Schmelzpunkt	Wassermenge		t		C
42,5°	Gelatine 2 g	+ 10 g H_2O	+ 0,5	$C = +3,1$,	
	" 2"	+ 100% H_2O	+ 8" H_2O	- 0,2	$C = -1$,
34,3	" 2"	+ 200% H_2O	+ 6" H_2O	- 0,2	$C = -1$,
25,0	" 2"	+ 300% H_2O	+ 4" H_2O	0	$C = 0$.

Das erste Experiment gibt uns die Differenz zwischen Aufquellungs- und Auflösungswärme. Im zweiten sowohl, wie im dritten Experiment hat sich die Quellung schon abgespielt, und zeigt sich nur die Lösungswärme. Im vierten Experiment war das thermische Resultat gleich Null, was dem Umstande zuzuschreiben ist, dass das Wasser des Colloids sich immer mehr dem flüssigen Zustande nähert, je grösser der Procentgehalt an demselben ist. Die spezifische Wärme des Endzustandes war so nahe gleich Eins, dass dieser Werth auch kurzweg zur Berechnung der Calorien eingesetzt wurde. Bei einer anderen Reihe von Experimenten wurde trockene Gelatine mit steigenden Mengen Wasser bei 48° C. übergossen. Die Resultate sind in folgender Tabelle angegeben, t ist die Temperatursteigerung.

Gelatine	4	2	2	2	2 g
Wasser	2	2	4	6	8 „
$t =$	+ 3,5	+ 3	+ 2,1	+ 1	+ 0,5°.

Man erkennt auch aus allen diesen Zahlen, dass beim Lösen der Gelatine sich unzweifelhaft zwei einander entgegengesetzte thermische Processe abspielen.

Anschliessend an obige Versuche bestimmten wir noch die Menge Wasser w , welche 1 g Gelatine bei verschiedenen Temperaturen t in gleichen Zeiten (einer Stunde) aufzunehmen vermag. Es war für:

t	1	3—4	9	20	30.
w	2,48	3,2	3,48	6,28	9,48.

Bei 35° fand vollkommene Lösung statt, und schmolz die Gelatine sehr rasch. Wir fanden übrigens, entgegengesetzt den Angaben der Lehrbücher, z. B. von Beilstein, dass sich Gelatine bei gewöhnlicher Temperatur in Wasser, wenn auch nur in sehr geringer Menge löst. Das von Gelatine, über der es längere Zeit gestanden hatte, abgegossene Wasser hinterliess beim Verdampfen einen deutlich verkohlenden Rückstand.

Versuche, die zur Bestimmung der latenten Schmelzwärme in der Weise angestellt wurden, dass man entweder die Erwärmungsgeschwindigkeit oder die Abkühlungsgeschwindigkeit ermittelte, wenn ein mit wasserhaltiger Gelatine gefülltes Gefäss in eine Umgebung von constanter höherer oder tieferer Temperatur gebracht wurde, ergaben keine sicheren Resultate. Die Gelatine geht durch einen plastischen Zustand hindurch.

Gummi arabicum. — Die Versuche wurden bei gewöhnlicher Temperatur angestellt. Das Gummi arabicum wurde als Pulver angewandt.

$x = 2$	$y = 10$	$t = + 1,4$	$C = + 9,0,$
$x = 2$	$y = 10$	$t = + 1,3$	$C = + 9,0.$

Die spezifische Wärme der Lösung war 0,93.

Zum Nachweise der negativen Lösungswärme wurde das Experiment so ausgeführt, dass der Hydratationsprocess durch mehrere empirische Versuche vom Lösungsprocess soviel als möglich gesondert wurde. Es stellte sich heraus, dass zur Hydra-

tation auf 2 g Gummi etwa 1 g Wasser zugesetzt werden musste, wobei sich Wärme entwickelte, und dass dann beim fernerer Zusatz von 4 g Wasser eine Temperaturniedrigung von 2° stattfand oder $C = -0,6$ pro Gramm Gummi war. Die Auflösungswärme ist, wie ersichtlich, sehr gering im Vergleich zur Hydrationswärme.

Traganthgummi. — Er wurde als Pulver angewandt.

$$\begin{array}{llll} x = 2 & y = 10 & t = +1,9 & C = +10,3, \\ x = 2 & y = 10 & t = +1,8 & C = +10,3. \end{array}$$

Specifische Wärme 0,93.

Da der Traganthgummi sich sowohl bei niederen wie bei höheren Temperaturen nur wenig löst, so war es nicht möglich, eine negative Lösungswärme zu constatiren. Jedemfalls vermindert dieselbe die positive Hydrationswärme.

Dextrin. — Das angewandte Dextrin enthielt Spuren von Stärke. Für die Hydrationswärme ergab sich:

$$\begin{array}{llll} x = 2 & y = 10 & t = +1,1 & C = 7,03, \\ x = 2 & y = 10 & t = +1,2 & C = 7,65. \end{array}$$

Im Mittel 7,34.

Specifische Wärme 0,91.

Die negative Lösungswärme wurde wie oben beim Gummi nachgewiesen. Auf 2 g Dextrin kam zur Hydratation weniger als 1 g Wasser, dabei entwickelte sich Wärme, und zeigte sich dann beim Zusatz von weiteren 4 g Wasser $t = -0,15^\circ$ und $C = -1,8$ Stärke.

$$\begin{array}{llll} x = 2 & y = 10 & t = +0,8 & C = 6,90, \\ x = 2 & y = 10 & t = +0,7 & C = 6,19, \end{array}$$

Mittel $C = 6,55$.

Specifische Wärme 0,97.

Um die negative Lösungswärme nachzuweisen, verfahren wir ganz wie beim Gummi arabicum. 1 g Stärke erforderte etwa 2 g Wasser zur Hydratation, und wurde dann auf Zusatz von weiteren 4 g Wasser $t = -0,2^\circ$ beobachtet oder $C = -1,2$ pro Gramm Stärke.

Gerbsäure. — Duvernoy fand die Lösungswärme dieses Colloids positiv, wir dagegen negativ.

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0,4 \quad C = -2,2.$$

Specifische Wärme 0,95.

Gerstenzucker und Rohrzucker. — Gerstenzucker wird durch vorsichtiges Erhitzen und Schmelzen von raffiniertem Rohrzucker erhalten.

Gerstenzucker.

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1,4 \quad C = +8,6,$$

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +1,4 \quad C = +8,6.$$

Rohrzucker.

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = -0,5 \quad C_1 = -2,8.$$

Der Gerstenzucker stellt eine amorphe Modification des Rohrzuckers dar; in der Lösung sind beide in der krystallinischen Form enthalten. Die Wärmemenge $C + C_1 = 11,5$ ist demnach die Umwandlungswärme von amorphem in krystallinischen Zucker. Diese ist hier wie in allen analogen Fällen positiv. Die krystallinische Modification stellt ja auch die stabilere Anordnung der Molecüle dar. Sie ist auch die dichtere. Der Rohrzucker hat ein specifisches Gewicht 1,5984, der Gerstenzucker 1,5122.

Weinsäure. — a) Rechtsweinsäure.

$$x = 1/2 \quad y = 10 \quad t = -1,0^{\circ} \quad C = -25,37$$

b) Inactive Weinsäure wurde als amorphe Masse erhalten durch vorsichtiges Erhitzen der Rechtsweinsäure auf 170° C.

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0,7 \quad C = +5,42,$$

$$x = 2 \quad y = 10 \quad t = +0,9 \quad C = +6,48.$$

Im Mittel 5,92.

Auch hier gibt die amorphe Substanz eine positive, die krystallinische eine negative Wärmetönung. Die Umwandlungswärme beträgt ca. 32,2. Berthelot und Jungfleisch haben die vier Modificationen der krystallisirten Weinsäure untersucht und stets, wie wir, eine negative Wärmetönung bei der Lösung gefunden. Wie beim Rohrzucker ist auch hier die krystallisirte Weinsäure mit einem specifischen Gewicht 1,7617 dichter als die amorphe mit einem specifischen Gewicht 1,6321.

Kieselsäure. — Um zu bestimmen, ob die Coagulation der Kieselsäure unter Wärmeentwicklung vor sich geht oder nicht, wurde in folgender Weise verfahren. Wasserglas wurde verdünnt; die Verdünnungswärme war negativ. Hierauf wurde durch sorgfältige Neutralisation mittelst Salzsäure Kieselsäure freigemacht und durch Zusatz von einer

Spur Ammoniak plötzlich coagulirt. Das letztere Phänomen wurde thermisch bestimmt. Es ergab sich bei den Versuchen $C = +12,2$ und $+11,8$ Calorien.

Danach ist die Coagulation der Kieselsäure mit einer beträchtlichen Wärmeentwicklung verbunden. Diese Wärmeentwicklung lässt sich auch beobachten, wenn man eine Lösung von Natriumsilicat durch Chlorwasserstoffsäure neutralisirt und die Lösung so concentrirt nimmt, dass die Coagulation von selbst eintritt. Auch hierbei steigt bei der Coagulation die Temperatur. Hr. Thomsen¹⁾ konnte bei der Coagulation von Kieselsäurelösungen keine Temperaturerhöhung constatiren. Wir glauben dies dem Umstande zuschreiben zu müssen, dass er Lösungen untersuchte, die, im Vergleich mit den von uns benutzten, sehr verdünnt waren, und dass seine Versuche etwa 20—30 Minuten dauerten, während bei uns die Coagulation fast momentan vor sich ging. Die Kieselsäuregelatine, die wir erhielten, enthielt deshalb auch viel weniger Wasser als die seinige, was ein schwer wiegender Factor ist.

Fasst man die Coagulation als eine Abscheidung des gelösten Körpers aus der Lösung auf, so hätte die hydratisirte Kieselsäure eine negative Lösungswärme. Rührt dieselbe aber, wie Grimaux will, von Condensation zweier Molecüle zu einem unter Wasserabscheidung her, der also z. B. bei Kieselsäure dem Process $2\text{Si}(\text{OH})_4 = \text{Si}_2(\text{OH})_6 + \text{H}_2\text{O}$ entspräche, so stellt die Coagulationswärme die dem angedeuteten chemischen Process entsprechende Wärmeentwicklung dar.

Eiweiss. — Es wurden Versuche sowohl mit frischem Eiweiss aus Eiern, als auch mit festem, löslichem Eiweiss, wie es in den Handel kommt, angestellt.

a) Eiweiss frischer Eier. Das Eiweiss eines Eies wog 22 g; die beobachtete Temperaturerhöhung bei der Coagulation desselben durch Essigsäure betrug $0,5^\circ$ oder $C = +12,1$ Cal.

Das Eiweiss eines anderen Eies wog 24 g; die beobachtete Temperaturerhöhung bei der Coagulation betrug $0,55^\circ$ oder $C = +12,4$ Cal.

b) Festes Eiweiss von Trommsdorff:

1. $s = 2$ $y = 10$ $t = +0,4$ $C = +2,8$.

1) J. Thomsen, Thermochem. Untersuch. 1. p. 211. 1882.

Specifische Wärme 0,96.

Dieses Eiweiss wurde durch Zusatz von etwas Salpetersäure coagulirt, die Temperaturerhöhung betrug $0,4^{\circ}$, also pro Gramm Eiweiss die Hydratationswärme $C = + 2,3$ Cal.

2. $x = 2$ $y = 10$ $t = + 0,4$ $C = + 2,8$ Cal.

Diese Lösung wurde coagulirt mit Salpetersäure, die Temperaturerhöhung betrug $0,4^{\circ}$, also pro Gramm Eiweiss 2,9 Calorien.

Löste man aufgequollenes Eiweiss in Wasser, so trat bei der Lösung eine Temperaturenniedrigung von ca. $0,20^{\circ}$ ein.

Weichte man trocknes Eiweiss mit ganz wenig Wasser ein, sodass der Hydratationsprocess den Lösungsprocess weit überwog, so wurde eine Temperaturerhöhung von $3,0^{\circ}$ erzielt.

Der Lösungsprocess des festen Eiweisses ist also nicht ein einfacher Vorgang, sondern er verläuft ähnlich demjenigen bei der Gelatine. Erst tritt eine Hydratation mit Wärmeentwicklung ein, der dann die eigentliche Lösung mit negativem Wärmeeffect folgt.

Diese Erscheinung dürfte physiologisch von Bedeutung sein.

Guthrie hat angegeben, dass die Tension des Wasserdampfes bei Lösungen von Colloiden gleich derjenigen des reinen Wassers ist. Für höhere Temperaturen würde schon aus seinen eigenen Versuchen folgen, dass dies nicht der Fall ist, indem der Siedepunkt von Gelatinelösung höher liegt als der von reinem Wasser. Für niedrige Temperaturen war die Richtigkeit der Guthrie'schen Angabe schon deshalb nicht wahrscheinlich, weil die Vereinigung von Wasser mit Gelatine z. B. mit einer Wärmeentwicklung verbunden ist. Directe vergleichende Versuche mit Lösungen von Gummi arabicum und Wasser ergaben in der That für die Gummilösungen eine kleinere Spannkraft als für das reine Wasser.

Fassen wir das Resultat der obigen Versuche zusammen, so ergibt sich:

Die Lösung des trocknen Colloids setzt sich aus zwei Processen zusammen, 1. der Hydratation, die mit Wärmeentwicklung, 2. der Lösung, die mit Wärmebindung verbunden ist.

Leipzig, im August 1884.

II. Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme einiger Wasser-Aethylalkoholgemische von der Temperatur; von Ad. Blümcke.

(Aus dem physikal. Laborat. der Techn. Hochschule zu München.)

(Hierzu Taf. II Fig. 1 u. 2.)

In einer früheren Arbeit: „Ueber den Einfluss des Concentrationsgrades auf die specifische Wärme wässeriger und alkoholischer Lösungen von Metallchloriden“ bediente ich mich des Bunsen'schen Eiscalorimeters zur Ermittlung der specifischen Wärme der betreffenden Flüssigkeiten. — Auch bei der vorliegenden Arbeit kam dieser Apparat zur Verwendung, und zwar fast genau in der früher bereits angegebenen Zusammenstellung. Die einzigen unwesentlichen Aenderungen, welche ich anbrachte, bestanden in der Art der Verbindung des Scalenrohres mit dem Calorimeter und der Einrichtung zur Zurückstellung des Quecksilberfadens in demselben nach jedem Versuch. Beide Vorkehrungen sind in Fig. 1a und b im Querschnitt gezeichnet. An dem senkrechten Ende des Scalenrohres ist mit Siegellack eine Büchse *B* angekittet, welche oben ein Schraubengewinde trägt, auf dem sich die Mutter *M* bewegt, während unten ein Ring *R* angeschraubt ist; ein zweiter Ring *R*₁ von ähnlicher Form wie *R* ist lose über den glatten Theil der Büchse verschiebbar. Zwischen beiden Ringen *R* und *R*₁ sitzt auf der Büchse der Kautschukring *K*, der durch Anziehen der Schraube *M* zusammengepresst werden kann. Die Dicke des Kautschukringes ist so zu bemessen, dass derselbe bei nicht angezogener Schraube bequem in den offenen Schenkel des Calorimeters einpasst und bei angezogener Schraube einen festen Abschluss ermöglicht. Diese im Princip keineswegs neue Vorrichtung gestattet ein schnelles und bequemes Einsetzen des Scalenrohres, ohne dass Gefahr vorhanden wäre, es könnten Luftblasen im Schenkel des Calorimeters zurückbleiben. Die Vorrichtung zur Zurückschiebung des Quecksilberfadens im Scalenrohr ist im unteren Theile genau die gleiche, nur hat die Büchse oben eine Erweiterung bei *E*,

in welche die innen mit einem Gewinde versehene zweite Büchse *F* eingeschraubt werden kann; in letzterer bewegt sich der oben mit einem Gewinde versehene Stift *D*, dessen glatter unterer Theil quecksilberdicht durch einen Lederring bei *G* gleitet. Es ist klar, dass durch Einschrauben des Stiftes *D* der Quecksilberfaden beliebig eingestellt werden kann. Ich brauche wohl kaum hinzuzufügen, dass alle letztgenannten Theile, weil sie mit Quecksilber in Berührung kommen, aus Stahl hergestellt sind.

Ueber das Verhalten der Eiscylinder (Eiskerne) des Calorimeters ist schon viel gesagt worden: nach den Beobachtungen Neesen's¹⁾ hat man es in der Hand, durch Aenderung des auf dieselben ausgeübten Druckes des Quecksilbers im engen Schenkel ein beliebiges Weiterfrieren oder Abschmelzen zu erzwingen; Verunreinigen des die Calorimeter umgebenden Wassers oder Schnees führen Weiterfrieren herbei. Nach Velten²⁾ soll die Art und Weise des Entstehens insofern auf ihr späteres Verhalten von Einfluss sein, dass solche Cylinder, welche streng nach Bunsen's Vorschrift, also durch Einführen eines abgekühlten Alkoholstromes in das Proberöhrchen erhalten wurden, ein Weiterfrieren zeigten, während diejenigen, welche entstanden, indem die bereits durch Gebrauch abgenutzten durch den durchgeführten Alkoholstrom wieder ergänzt wurden, im Abschmelzen begriffen waren.

Ich erwähnte in meiner früheren Arbeit, dass sämtliche von mir hergestellten Eiscylinder im Abschmelzen begriffen waren, welche mit Ausnahme der anfänglichen durch Ergänzen des abgenutzten in angegebener Weise erhalten wurden.

Die Bemerkung Velten's veranlasste mich, dem Verhalten des Eiscylinder etwas mehr Aufmerksamkeit zu schenken. Ich pflegte dieselben zu Anfang genau nach den Vorschriften Bunsen's zu erzeugen, später indem ich das Calorimeter mit einer Kältemischung aus zerstoßenem Eis und Kochsalz umgab und zugleich einen Alkoholstrom durch

1) Neesen, Beibl. 7. p. 587. 1888.

2) Velten, Wied. Ann. 21. p. 52. 1884.

das Proberöhrchen führte, wodurch es mir leichter gelang, das Wasser zum Gefrieren zu bringen; die erste Eisbildung geschah bei allen meinen Versuchen ohne Ausnahme bei einer Temperatur von ungefähr -7°C ., und zwar erstarrte jedesmal die ganze Masse; eine sofortige Eisbildung rings um das Proberöhrchen herum beobachtete ich nie. War die erste Eisbildung eingetreten, so wurde die umgebende Kältemischung schnell entfernt und das Calorimeter mit Wasser rein abgewaschen und hierauf wieder ganz nach Bunsen verfahren, nur stellte ich das Instrument in einen kleinen Kasten, der mit Eisstücken umgeben war, um nicht das Gefrieren durch die Wärme der Umgebung zu beeinträchtigen. — Um das Verhalten der Eiscylinder genauer zu studiren, hatte ich zwei genau gleichmässig eingerichtete Calorimetergefässe; beim ersten stand das Instrument in destillirtem Wasser, hierbei zeigten alle Cylinder, mochten sie entstanden sein, wie sie wollten, ein geringes Abschmelzen; die Höhe des Quecksilbers im engen Schenkel des Calorimeters betrug ungefähr 25 cm. Im zweiten Gefäss hatte ich das Wasser durch Spuren von Kochsalz verunreinigt, die Folge davon war, dass sämtliche Cylinder ohne alle Ausnahme ein allerdings kaum wahrnehmbares Weiterfrieren zeigten; nur durch Steigern des Druckes, indem ich an das Scalenrohr einen mit Quecksilber gefüllten Schlauch ansetzte, trat wieder Abschmelzen ein. Nach Vermehrung des Kochsalzzusatzes gelang es mir nicht mehr, durch den Druck einer Quecksilbersäule von ungefähr 50 cm das sehr merklich gewordene Weiterfrieren aufzuheben. Später, nachdem die Calorimeter einige Monate in Gebrauch waren, zeigten bei beiden Apparaten alle Eiscylinder infolge zufällig eingetretener Verunreinigung des Wassers ein so starkes Weiterfrieren, dass ich das Wasser einfach entfernte, sodass die Instrumente nur noch von Luft umgeben im inneren Gefäss standen. Dadurch hörte das Weiterfrieren auf; allerdings wurde der Scalengang etwas unregelmässiger, aber keineswegs in der Weise, um Beobachtungen unmöglich zu machen. Ich konnte also bei obigen Untersuchungen in keinem Falle die Beobachtung Velten's bestätigen; allerdings muss ich

zugeben, dass ich den Druck auf die Eiscylinder nicht hinreichend genug veränderte, um mit aller Gewissheit über den Gegenstand entscheiden zu können.

Das im grösseren Gefäss nachzulegende Eis versuchte ich durch Schnee zu ersetzen, allein ich machte dabei die unangenehme Erfahrung, dass derselbe nicht eben sehr unreinigt zu sein braucht, um die Rolle einer Kältemischung zu übernehmen, was zur Folge hatte, dass die Eiskruste im kleineren Gefäss beständig wuchs und täglich verkleinert werden musste, wollte ich nicht das Calorimeter der Gefahr des Anfrierens aussetzen, wodurch in der That einmal ein Zerbrechen desselben herbeigeführt wurde.

Die zu untersuchenden Körper wurden erwärmt theils in einem Heizgefäss mit Rückkühlung durch Flüssigkeitsdämpfe, wie Fig. 2 schematisch zeigt. Der im Kessel *F* entwickelte Dampf trat bei *A* in den inneren Mantel des den Körper enthaltenden Apparates, verliess denselben bei *B*, um durch das Rohr *H* gehend bei *C* in den äusseren Mantel zu treten, den es bei *D* verliess, um nach geschehener Verflüssigung durch die Kühler *G* wieder nach *F* zurückzukehren. Alle Theile, mit Ausnahme der zur Condensation dienenden, waren mit Filz überzogen.

Gehalten wurden die Körper durch den Schieber *E*, der von U-förmiger Gestalt war, um einen Wärmeverlust nach unten möglichst zu verhindern; er bewegte sich in passenden, die Mäntel des Apparates durchbrechenden Führungen. Das innere Rohr war oben durch einen Kork verschlossen, der mit einer Durchbohrung zur Aufnahme des Thermometers versehen war. Um die Körper in das Calorimeter zu bringen, wurde der ganze an einem zweckentsprechenden Gestell angebrachte Apparat an dasselbe herangebracht, sodass sich das innere Rohr des ersteren direct über dem Proberöhrchen befand, und dann der Schieber *E* einfach zurückgezogen. Zum Heizen dienten mir die Dämpfe von Wasser ($97 - 98^{\circ} \text{C.}$), Schwefelkohlenstoff ($44 - 45^{\circ} \text{C.}$) und Aether ($30 - 32^{\circ} \text{C.}$).

Ich hatte alle Ursache, zufrieden zu sein, was die Constanz der Temperatur im Inneren des Heizgefässes anlangt,

dagegen wollte es mir nicht gelingen, ein passendes Material zur Dichtung des Kesseldeckels beim Heizen mit Schwefelkohlenstoff und Aether zu finden; die beim Wasser sehr brauchbare Pappe war für die beiden übrigen undicht, so dass immer geringe Mengen entwichen, was beim Schwefelkohlenstoff etwas unangenehm war. Beim Aether entzündeten sich einigemal die Dämpfe, weshalb ich denselben später nicht mehr verwendete.

Ferner bediente ich mich zum Erwärmen der Körper eines durch eine sich automatisch regulirende Flamme auf constanter Temperatur gehaltenen Wasserbades. Dabei befanden sich die Körper selbst in Wärmeflaschen ganz ähnlich den von Velten angewendeten.

In allen Fällen wurden die Temperaturen mit dem Thermometer bestimmt.

Wie bei meiner früheren Arbeit, wurden die Flüssigkeiten in Glashüllen eingeschlossen.

Was ich über die specifische Wärme des Glases zu sagen habe, ist keineswegs geeignet, demselben zur besonderen Empfehlung betreffs seiner Verwendbarkeit zu dienen.

Wie ich schon in meiner ersten Arbeit angab, fand ich die specifische Wärme des Glases schwankend, obschon alle von mir verwendeten Sorten von derselben Quelle bezogen und nach demselben Recept hergestellt waren. Ich fand später, dass Stücke von ein und demselben Rohr, wenn schon geringe, so doch merkliche Verschiedenheiten zeigten; ferner erhielt ich für das gleiche Stück bei aufeinanderfolgenden Versuchen verschiedene Werthe, und zwar meist abnehmende, z. B. erhielt ich für ein Stück: für ein zweites:

$$C_{0-98} = 0,193, 0,190, 0,188. \quad C_{0-98} = 0,206, 0,204, 0,203.$$

Eine weitere Glassorte ergab zuerst:

$$C_{0-54} = 0,183, \text{ dann } C_{0-15} = 0,165, \text{ dann wieder } C_{0-54} = 0,177.$$

Diese Verschiedenheit konnte nicht von irgend welchen Unordnungen in den Calorimetern herrühren, denn für ein Stück Kupfer erhielt ich immer die gleiche specifische Wärme, natürlich abgesehen von den Beobachtungsfehlern.

Um zu sehen, von welchem Einfluss der Umstand ist,

dass die Glashüllen bei der Herstellung, sowie beim Zerschmelzen einige Zeit der Gebläseflamme ausgesetzt werden, hielt ich ein Stück, für welches:

$$C_{0-98} = 0,198$$

war, längere Zeit in die Flamme, ich bekam dann:

$$C_{0-98} = 0,201,$$

nachdem es so lange der Flamme ausgesetzt war, bis es matt wurde, ward:

$$C_{0-98} = 0,207.$$

Um diese Einflüsse möglichst zu verringern, verfuhr ich in der Weise, dass ich von jeder Reihe von Glashüllen, die aus einem Rohr hergestellt wurden, drei entnahm und von jeder die specifische Wärme bestimmte, das Mittel aus diesen wurde dann für die übrigen angenommen. Wurden mit einer Reihe von Glashüllen, welche Flüssigkeiten enthielten, die Versuche wiederholt, so geschah natürlich dasselbe mit den leeren Glashüllen.

Die Ursache dieser Erscheinungen dürfte wohl dieselbe sein, welche die Aenderungen der Fixpunkte der Thermometer veranlasst, sie wäre also in molecularen Umlagerungen zu suchen, über die aber alle Anhaltspunkte fehlen.

Was die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Glases von der Temperatur anlangt, so konnte ich die bisherigen Beobachtungen darüber nur bestätigen, wonach sie im allgemeinen mit der Temperatur zunimmt.

Um einen Begriff von der Genauigkeit und Brauchbarkeit der von mir erhaltenen Zahlen zu geben, wird es vielleicht passend sein, wenn ich die Resultate über die specifische Wärme des Wassers mittheile.

Tabelle I.

Gewicht des Wassers	Gewicht des Glases	Erhitzungs- Temperatur	Spec. Wärme des Wassers	
0,6673 g	1,5354 g	98,46 °C.	1,0129	
" "	" "	98,43 "	1,0122	
0,5461 "	1,4975 "	98,42 "	1,0143	
" "	" "	98,45 "	1,0130	Mittel 1,013

Gewicht des Wassers	Gewicht des Glases	Erhitzungs- Temperatur	Spec. Wärme des Wassers	
0,6342 g	1,2827 g	53,8 °C.	1,019	
" "	" "	53,7 "	1,005	
" "	" "	53,9 "	1,017	
0,4902 "	1,1805 "	53,8 "	1,006	
" "	" "	53,8 "	1,013	
" "	" "	54,0 "	1,008	Mittel 1,011
0,6789 g	1,4336 g	44,7 °C.	1,005	
" "	" "	44,8 "	1,015	
" "	" "	45,0 "	1,019	
" "	" "	44,8 "	1,004	
0,4339 "	1,6693 "	44,5 "	1,010	
" "	" "	44,4 "	1,006	
" "	" "	44,8 "	1,008	
" "	" "	44,7 "	1,005	Mittel 1,006
0,6342 g	1,2827 g	30,1 °C.	1,013	
" "	" "	30,1 "	1,007	
" "	" "	30,2 "	1,006	
" "	" "	30,1 "	1,014	
0,5334 "	1,1828 "	30,2 "	1,023	
" "	" "	30,1 "	1,008	
" "	" "	30,1 "	1,005	
" "	" "	30,2 "	1,013	Mittel 1,012
0,4902 g	1,1805 g	14,8 °C.	1,015	
" "	" "	14,8 "	1,028	
" "	" "	14,9 "	1,029	
0,6342 "	1,2827 "	14,5 "	1,018	
" "	" "	14,5 "	1,030	
" "	" "	14,5 "	1,024	
0,5334 "	1,1828 "	14,8 "	1,009	
" "	" "	14,9 "	1,014	
" "	" "	15,0 "	1,033	Mittel 1,022

Wie zu erwarten war, sind die Abweichungen um so grösser, je enger das Temperaturintervall ist; etwas grösser waren die Abweichungen bei den Mischungen, weil bei diesen wegen ihres geringeren specifischen Gewichts das Gewicht des Glases mehr überwog, als beim Wasser. Was die von mir erhaltenen Werthe für die specifische Wärme des Wassers anlangt, so widersprechen sie denjenigen Veltens keineswegs; es ist nach

meinen Beobachtungen:

$$\frac{C_{0-15}}{C_{0-98}} = 1,009$$

$$\frac{C_{0-30}}{C_{0-98}} = 0,999$$

nach Veltens:

$$\frac{C_{0-14,59}}{C_{0-99,08}} = 1,011$$

$$\frac{C_{0-27,67}}{C_{0-99,08}} = 1,007$$

$$\frac{C_{0-45}}{C_{0-98}} = 0,996$$

$$\frac{C_{0-42,14}}{C_{0-98,68}} = 1,000$$

$$\frac{C_{0-54}}{C_{0-98}} = 0,998$$

$$\frac{C_{0-50,13}}{C_{0-98,68}} = 0,999$$

Es haben also die Verhältnisse der specifischen Wärme bei mir ungefähr denselben Gang wie bei Velten; natürlich verdienen die Zahlen des letzteren grösseres Vertrauen, weil er grössere Substanzmengen anwandte, dann auch, weil er das Wasser nicht in Glas, sondern in Platin einschloss.

In folgender Tabelle sind die Mittelwerthe der einzelnen Versuchsdaten angegeben; es bedeutet p den Procentgehalt der Mischung an Alkohol, n die Anzahl der Molecüle Wasser, die auf ein Molecül Alkohol kommen. Der Gang der Wärmecapacitäten ist innerhalb sämtlicher Temperaturintervalle im grossen und ganzen derselbe: ein anfängliches Steigen bis zu einem Maximum, welches bei $p = 15$ bis $p = 20$ eintritt, dann wieder ein Sinken, also gerade so, wie es von allen übrigen Beobachtern¹⁾ auch gefunden wurde.

Tabelle II.

p	n	C_{0-15}	C_{0-30}	C_{0-45}	C_{0-60}	C_{0-98}
0	∞	1,022	1,012	1,009	1,011	1,013
1,4	180	1,034	1,019	—	1,020	—
5,5	43,9	1,066	1,037	—	1,042	—
11,4	19,9	—	—	1,055	—	1,089
14,9	14,6	1,116	1,069	—	1,071	—
20,1	10,2	1,107	1,070	—	1,071	—
20,8	9,7	—	—	1,065	—	1,102
24,8	7,7	—	—	1,054	—	1,086
28,3	6,5	—	—	1,038	—	1,072
29,6	6,1	1,057	1,036	1,036	1,042	—
47,5	2,9	0,940	0,922	0,920	0,954	0,964
78,6	0,7	0,717	0,718	0,725	0,758	0,792
99,3	0,0	0,569	0,579	0,595	0,630	0,688

Ein directes Vergleichen meiner Zahlen mit denen anderer Beobachter ist wegen der Verschiedenheit der Temperaturgrenzen nicht möglich.

1) Dupré u. Page, Phil. Mag. (4) 38. p. 158—162. 1869. Schüller, Inauguraldissertation. Bonn 1869. Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 116—146 u. 192—221. 1871.

Schüller macht auf den eigenthümlichen Gang des Verhältnisses der beobachteten zu den berechneten specifischen Wärmen der von ihm untersuchten Wasser-Alkoholgemische aufmerksam, welches mit zunehmender Concentration bis zu einem bei $p = 30$ liegenden Maximum steigt, um dann langsam zu fallen; folgende Tabelle zeigt, dass dies auch bei allen meinen Versuchsreihen der Fall ist, nur scheint das Maximum der specifischen Wärmen zwischen 0 und 98° näher an $p = 20$ zu liegen.

Tabelle III.

p	C_{0-15}	k_{0-15}	$\frac{C}{k}$	C_{0-30}	k_{0-30}	$\frac{C}{k}$	C_{0-45}	k_{0-45}	$\frac{C}{k}$
10	1,100	0,976	1,127	1,054	0,968	1,089	1,050	0,967	1,084
20	1,110	0,980	1,194	1,070	0,924	1,158	1,065	0,925	1,156
30	1,058	0,883	1,199	1,041	0,880	1,188	1,028	0,883	1,164
40	0,992	0,837	1,185	0,971	0,836	1,161	0,968	0,841	1,151
50	0,992	0,791	1,166	0,906	0,792	1,144	0,908	0,800	1,135
100	0,560	0,560	1,000	0,573	0,573	1,000	0,590	0,590	1,000

p	C_{0-54}	k_{0-54}	$\frac{C}{k}$	C_{0-98}	k_{0-98}	$\frac{C}{k}$
10	1,055	0,973	1,084	1,082	0,980	1,104
20	1,072	0,935	1,146	1,103	0,946	1,166
30	1,041	0,897	1,161	1,063	0,913	1,164
40	0,990	0,859	1,153	1,006	0,880	1,143
50	0,931	0,821	1,134	0,950	0,847	1,112
100	0,630	0,630	1,000	0,680	0,680	1,000

Auf der Figurentafel ist der Verlauf der specifischen Wärmen graphisch dargestellt; die Ordinaten sind die specifischen Wärmen, die Abscissen die Concentrationsgrade. Ein Blick auf diese Curven wird erklärlich finden lassen, dass es mir nicht gelang, eine Gesetzmässigkeit zwischen specifischer Wärme, Concentration und Temperatur der betreffenden Gemische aufzufinden.

Bis ungefähr $p = 20$ liegen die Curven übereinander, dann senkt sich C_{0-15} , um die übrigen zu schneiden; ebenso schneidet die anfänglich zwischen C_{0-54} und C_{0-45} verlaufende C_{0-30} die letztere.

J. Thomson¹⁾ benutzt die von Dupré und Page gefun-

1) J. Thomson, Thermochemische Untersuchungen. 1. p. 74. 1882.

denen specifischen Wärmen sowie die Mischungswärmen der Wasser-Alkoholgemische zur näherungsweise Berechnung der Wärmetönung derselben bei ihren Siedepunkten und findet, dass dieselbe gleich Null ist. Ich behalte im Folgenden die Thomsen'sche Bezeichnung bei, es ist also:

q die Aenderung der Wärmetönung,

q_a die Molecularwärme des Wassers,

q_b " " " Alkohols,

q_c das calorimetrische Aequivalent des Gemisches,

$P = 46.100/p$ das Gewicht der Mischung, das einem Molechl Alkohol entspricht,

s die specifische Wärme der Mischung,

ist ferner noch:

σ die specifische Wärme des Wassers,

σ_1 " " " " Alkohols,

dann ist:

$$q = q_a + q_b + q_c = (P - 46) + 46\sigma_1 - s \cdot P.$$

Folgende Tabellen enthalten die Thomsen'schen Werthe für q und diejenigen, welche man erhält, wenn man in diese Gleichung die von mir gefundenen Werthe einmal $s = C_{0-54}$, dann $s = C_{0-98}$ einsetzt.

Tabelle IV.

p	P	s	q_c	q	
100	46	0,6043	27,80	0,0	Thomsen
90	51,11	0,6576	33,61	- 0,7	
40	115,00	0,9680	113,3	-14,5	
30	153,33	1,0260	157,3	-22,5	
20	230,00	1,0436	240,0	-28,2	
10	460,00	1,0358	476,4	-34,6	
100	46	0,630	28,98	0,0	W
90	51,11	0,687	35,11	- 1,0	
40	115,00	0,990	113,9	-15,1	
30	153,33	1,041	159,6	-22,1	
20	230,00	1,072	246,6	-31,6	
10	460,00	1,055	485,3	-37,8	
100	46	0,680	31,28	0	W
90	51,11	0,730	37,31	- 0,9	
40	115,00	1,006	115,7	-14,5	
30	153,33	1,063	163,0	-21,0	
20	230,00	1,103	253,7	-36,0	
10	460,00	1,082	507,7	-47,0	

Es nimmt also φ mit der Temperatur zu; die geringen Unregelmässigkeiten für $p = 40$ und $p = 30$ können leicht durch Beobachtungsfehler erklärt werden.

Thomsen berechnet ferner die Wärmeentwicklung R_t bei der Siedetemperatur T aus der von Dupré und Page bei der Temperatur t beobachteten nach der Formel:

$$R_T = R_t + \varphi (T - t),$$

sowie nach der aus den Versuchsdaten dieser Beobachter abgeleiteten Formel:

$$R' = -68,2 \cdot \varphi.$$

Die folgenden Tabellen enthalten die von Thomsen erhaltenen Werthe sowie die sich ergebenden, wenn φ nach meinen Beobachtungen bestimmt wird.

Tabelle V.

p	T	t	$T-t$	φ	$\varphi(T-t)$	R_t	R_T	R'	$R_t - R'$
90	78	18,1	59,9	- 0,7	- 42	79	+ 37	48	+ 31
40	82,5	17,4	65,1	-14,5	- 943	1032	+ 89	986	+ 46
30	84	17,3	66,7	-22,5	-1481	1471	- 10	1514	- 43
20	86,5	16,1	70,4	-28,2	-1985	2022	+ 37	1918	-104
10	91	17,3	73,7	-34,6	-2550	2455	- 95	2353	-102
90	78	18,1	59,9	- 1,0	- 60	79	+ 19	68	+ 11
40	82,5	17,4	65,1	-15,1	- 983	1032	+ 49	1029	+ 3
30	84	17,3	66,7	-22,1	-1474	1471	- 3	1507	- 36
20	86,5	16,1	70,4	-31,6	-2225	2022	- 203	2155	-133
10	91	17,3	73,7	-37,8	-2786	2455	- 331	2578	-123
90	78	18,1	59,9	- 0,9	- 54	79	+ 25	61	+ 18
40	82,5	17,4	65,1	-14,5	- 944	1032	+ 88	989	+ 43
30	84	17,3	66,7	-21,0	-1401	1471	+ 70	1432	- 39
20	86,5	16,1	70,4	-36,0	-2584	2022	- 512	2455	-433
10	91	17,3	73,7	-47,0	-3464	2455	-1009	3205	-750

Wie man sieht, sind bei Anwendung der von mir erhaltenen Werthe der specifischen Wärme zwischen 0 und 54° die Werthe für R_T weniger in Uebereinstimmung mit der Theorie als bei Thomsen, aber immer noch nicht geeignet, dessen Schlüsse umzustossen. Dagegen erhalte ich bei Anwendung der specifischen Wärme zwischen 0 und 98° für R_T bei $p = 20$ und $p = 10$ entschieden zu grosse Werthe. Im ersten Fall lassen sich die Unterschiede wohl noch durch Beobachtungsfehler erklären, dagegen entschieden nicht mehr

im zweiten, denn die Grenzen derselben sind bei der Versuchssreihe zwischen 0 und 98° dazu zu enge. Es ist aber eins nicht zu vergessen, nämlich dass die Gleichung:

$$R_T = R_i + \varphi (T - t)$$

nur eine angenäherte Gültigkeit hat, und es sehr fraglich ist, ob sie in dieser Form namentlich dann noch bestehen darf, wenn die Flüssigkeiten über ihre Siedepunkte erhitzt sind.

III. *Notiz über die Grösse der Maxwell'schen Molecularwirbel und über die Dichtigkeit des Lichtäthers; von L. Graetz.*

Die Maxwell'sche Theorie der Molecularwirbel in Verbindung mit der Beobachtung von Kundt über die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes beim Durchgang durch Eisen, gestattet die Berechnung einer oberen Grenze für die Dichtigkeit des Lichtäthers, die verhältnissmässig nicht weit abweicht von der unteren Grenze, welche sich aus einer Formel von Sir W. Thomson entnehmen lässt. Es ergibt sich aus beiden, gänzlich von einander unabhängigen Betrachtungen, dass die Dichtigkeit des freien Lichtäthers zwischen 10^{-16} und 10^{-18} von der des Wassers ist.

Die Theorie der Molecularwirbel ist bekanntlich von Maxwell zuerst in specieller, dann in allgemeinerer Form ausgeführt worden. Die allgemeine Behandlung¹⁾ setzt nur voraus, dass in einem magnetischen Feld eine Bewegung stattfindet (was Thomson als nothwendige Folgerung aus den Erfahrungsthatssachen hinstellt), dass diese Bewegung den Helmholtz'schen Wirbelgesetzen folgt, und dass magnetische und optische Verschiebungen eines Theilchens sich zusammensetzen können.

Die specielle Behandlung²⁾ macht noch weitere Annahmen

1) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism 2. § 822–829.

2) Maxwell, Phil. Mag. (4) 21. p. 161, 281, 338. 1861; 23. p. 12, 1862.

über Form und Geschwindigkeit der Wirbel, über die Eigenschaften des Mediums, in welchem sie stattfinden u. s. w. Beide Behandlungen führen zu dem gleichen Ausdruck für die magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes. Sie geben nämlich, wenn man von der Dispersion absieht und die Verdet'sche Constante mit ω bezeichnet, die Gleichung:

$$\omega = m \frac{i^3}{\lambda^3}.$$

Darin ist i der Brechungsindex der Substanz und λ die Wellenlänge des Lichtes im freien Aether. Dagegen ist m eine Constante, welche in der allgemeinen Theorie keine einfache physikalische Bedeutung hat, welche aber in der speciellen Theorie sich zusammengesetzt zeigt aus Grössen, die die Eigenschaften des Mediums und der Wirbel bedingen. Dass die Maxwell'sche Formel von den bisher über die magnetische Drehung der Polarisationssebene aufgestellten am besten mit der Erfahrung übereinstimmt, ist bekannt, wenn auch noch nicht unbedeutende Abweichungen übrig bleiben. Uebrigens ist auch die specielle Theorie der Drehung der Polarisationssebene gänzlich unabhängig von der künstlichen Hypothese der frictionsräderartig wirkenden Zwischenpartikelchen, steht und fällt also nicht mit diesen.

Das Medium, in welchem die angenommenen Wirbelbewegungen stattfinden, ist der Lichtäther, dessen Dichtigkeit in einer Substanz ρ sei. Dies folgt aus der Gleichheit der elastischen Eigenschaften, die sich in der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit mit dem Verhältniss der beiden electrischen Einheiten (der kritischen Geschwindigkeit) zeigt. Nach der Fresnel'schen Anschauung, die Maxwell adoptirt, hängt ρ mit der Dichtigkeit des freien Lichtäthers zusammen durch die Gleichung:

$$\rho = si^2,$$

wo i der Brechungsindex der Substanz ist.

Von der Dichtigkeit ρ hängt aber auch die magnetische Inductionsconstante μ der Substanz ab, und zwar ist¹⁾:

$$\mu = 4\pi C\rho = 4\pi Csi^2,$$

1) Maxwell, l. c. 21. p. 166. 1861.

worin C eine Constante ist, welche abhängt von der Vertheilung der Wirbel, ihrer Gestalt und der Gleichförmigkeit oder Ungleichförmigkeit ihrer Geschwindigkeit. Bei kreisförmigen Wirbeln von gleichförmiger Geschwindigkeit ist:

$$C = \frac{1}{4} \text{ also } \mu = \pi \rho,$$

und dieser Werth von C muss für Luft angenommen werden¹⁾, weil nur dadurch die Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit mit dem Verhältniss der electrostatischen und electromagnetischen Einheit herauskommt. Da alle diamagnetischen und schwachmagnetischen Körper nahezu dieselbe magnetische Inductionsconstante haben, und auch ihre Brechungsexponenten verhältnissmässig wenig verschieden sind, so hat für sie auch C nahezu denselben Werth. Für Eisen, Nickel, Kobalt weicht aber der Werth von C erheblich von $\frac{1}{4}$ ab.

Die directe Formel nun, zu welcher Maxwell²⁾ für die Drehung der Polarisationssebene gelangt, lautet in den obigen Bezeichnungen:

$$(1) \quad \omega = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} \frac{r \mu i}{s^{3/2} A^2 V},$$

worin r der Radius eines Wirbels, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether (oder in Luft) ist.

Durch Einsetzung des Werthes von μ wird:

$$\omega = m \frac{i^2}{A^2},$$

und es hat m die Bedeutung:

$$m = \frac{2\pi^2}{V\pi} C \frac{r}{s^{3/2}} \frac{1}{V}.$$

Aus der Formel (1) erkennt man zunächst, dass man ohne weiteres die relativen Werthe der Radien der Molecularwirbel in verschiedenen Substanzen berechnen kann, wenn man nur die relativen Werthe von ω , μ und i kennt. Nehmen wir Wasser als Einheit ($\omega_1 = 1$, $r_1 = 1$, $\mu_1 = 1$, $i_1 = 1$), so ist:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\omega}{\omega_1} \frac{\mu_1}{\mu} \frac{i_1}{i},$$

und es ist darin μ_1/μ für alle Substanzen = 1, ausser für Eisen, (Nickel und Kobalt).

1) Maxwell, l. c. 23. p. 22. 1862.

2) Maxwell, l. c. 23. p. 95. 1862.

Es zeigt sich nun, dass in allen festen und flüssigen Körpern die Grösse der Molecularwirbel nur verhältnissmässig wenig verschieden ist. Es ist z. B.¹⁾ für

Wasser	$r = 1$	Faraday's Glas . .	$r = 3,20$
Schwefelkohlenstoff	$r = 2,23$	Creosot	$r = 0,77$
Salpetersäure . . .	$r = 0,60$		

Für die Gase unter Atmosphärendruck ist die relative Grösse der Wirbel eine viel kleinere, nämlich (nach Kundt und Röntgen) z. B. für

Wasserstoff $r = 0,00057$, Sauerstoff $r = 0,00047$, Kohlenoxyd $r = 0,00100$.

Dagegen ist für Eisen, Nickel und Kobalt der Radius der Molecularwirbel ein ausserordentlich viel grösserer. Für Eisen ist nach den Versuchen von Kundt²⁾ die Drehung etwa 35000 mal so gross als bei Glas, also etwa 140 000 mal so gross als bei Wasser. Der Werth von μ ist nur angenähert bekannt. Aus Eisenvitriol electrolytisch niedergeschlagenes Eisen hat nach Claus³⁾ bei gleichem Gewicht und gleichen magnetisirenden Kräften ein magnetisches Moment, das nur etwa gleich dem dreizehnten Theil von dem ganz weichen Eisens ist. Für ganz weiches Eisen ist $\kappa = 32$, also für unser Eisen $\kappa = 2,5$ und daher:

$$\mu = 1 + 4\pi\kappa = 32.$$

Ich setze also $\mu_1/\mu = 1/32$.

Auch der Werth der Brechungsexponenten für eine durchsichtige Eisenschicht ist nicht bekannt. Angenähert wird man ihn ebenso gross setzen dürfen, wie für Stahl, den Voigt⁴⁾ aus Jamin's Versuchen zu $i = 2$ berechnet.

Daraus ergibt sich der Radius der Molecularwirbel im Eisen: $r = 3000$

den im Wasser gleich 1 gesetzt.

Für Kobalt fand Kundt etwa den gleichen Werth für ω , für Nickel nur etwa 56000 (Wasser = 1). μ kann man

1) Die Werthe von ω sind aus der Zusammenstellung in Wiedemann's Electricität 3. p. 922—933 entnommen.

2) Kundt, Wied. Ann. 23. p. 237. 1884.

3) Claus, s. Wiedemann, Galvanismus 3. p. 566. 1883.

4) Voigt, Wied. Ann. 23. p. 128 u. 143. 1884.

aus Mangel an bekannten Werthen, für beide etwa ebenso gross setzen. i ist nach Voigt für Kobalt = 1,73, für Nickel = 1,6. Daraus ergibt sich für Kobalt $r = 3400$, für Nickel $r = 1510$.

Die hervorragenden magnetischen Eigenschaften des Eisens, Nickels und Kobalts sind also, unter consequenter Anwendung der Maxwell'schen Theorie, verbunden mit einer relativ sehr bedeutenden Grösse der Molecularwirbel. Im allgemeinen befindet sich in einem magnetischen Feld der Aether sowohl innerhalb der einzelnen Molecüle als in den Zwischenräumen in wirbelnder Bewegung. Die Grösse der einzelnen Wirbel ist im allgemeinen sehr klein gegen die Grösse eines Molecüls, wie Maxwell¹⁾ annimmt. Beim Eisen nun (und Kobalt und Nickel), dessen Wirbel eine verhältnissmässig so bedeutende Grösse haben, liegt es nahe, anzunehmen, dass der Aether der Eisenmolecüle als Ganzes wirbelt. Schon Maxwell²⁾ machte eine ähnliche Annahme. Er kannte aber noch nicht das höchst merkwürdige und unerwartete Resultat von Kundt, dass das Eisen selbst positive Drehung zeigt, und glaubte daher, dass die Eisenmolecüle in entgegengesetzter Richtung wirbeln, wie der Aether. Jedenfalls erhält man durch die Annahme, dass im Eisen die Molecüle (resp. ihr Aether) als Ganzes wirbeln, eine obere Grenze für den Radius der Molecularwirbel.

Die Grösse eines Eisenmolecüls ist nicht direct bekannt. Aus dem Loschmidt'schen Condensationscoefficienten in Verbindung mit dem Avogadro'schen Gesetz ergibt sich, dass sein Radius $< 1,8 \cdot 10^{-8}$ cm ist, also nicht sehr abweicht von den Radien der anderen Molecüle. Für das einzige metallische Molecül, das Quecksilber, dessen Radius aus der molecularen Weglänge berechnet ist, fand Koch³⁾ den Radius $< 0,95 \cdot 10^{-8}$ cm. Nehmen wir diesen Werth als auch angenähert für das Eisen gültig an, so wäre der Radius eines Molecularwirbels im Eisen $r \leq 0,95 \cdot 10^{-8}$ cm und daher der Radius eines Molecularwirbels im Wasser:

$$r \leq 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ cm.}$$

1) Maxwell, l. c. 21. p. 345. 1861.

2) Maxwell, l. c. 23. p. 90. 1862.

3) Koch, Wied. Ann. 19. p. 587. 1893.

Da nun für Wasser $C = 1/4i^2$ ist, so ist:

$$\omega = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\pi}} \frac{r}{s^{3/4}} \frac{i}{A^2 V},$$

und darin sind jetzt alle Grössen in absolutem Maasse bekannt, ausser s , der Dichtigkeit des Aethers im freien Raum. Es ist nämlich (für die D -Linie):

$$\omega = 0,3767 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{-1/2} \text{ sec}^1), \quad A = 5,891 \cdot 10^{-5} \text{ cm}, \\ V = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}, \quad i = 1,834.$$

Daraus ergibt sich die Dichtigkeit des Aethers (bezogen auf Wasser):

$$s < 9 \cdot 10^{-16}.$$

Es ist von Interesse, diesen oberen Werth für die Dichtigkeit des Aethers zu vergleichen mit dem unteren Grenzwert, der sich aus einer Formel von Thomson²⁾ berechnen lässt. Thomson zeigte aus Beobachtungen von Pouillet, dass die Dichtigkeit des Aethers bezogen auf Wasser grösser ist, als:

$$\frac{4}{n^2} 10^{-30}.$$

Darin ist n das Verhältniss der grössten Geschwindigkeit eines Aethertheilchens zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Dieses Verhältniss schätzte Thomson höchstens auf $1/50$. Glan³⁾ suchte n dadurch zu bestimmen, dass er annahm, der Aether zerreisse bei den Lichtschwingungen nicht, und es sei seine grösstmögliche Dilatation höchstens so gross wie für Glas oder Wasser oder andere Flüssigkeiten, δ . Er setzte also:

$$\sqrt{1+n^2} - 1 = \delta.$$

Für Glas berechnete er $\delta = 1/1443$, für Wasser $\delta = 1/37,10$. Doch zeigte E. Wiedemann⁴⁾ dass auch für Wasser δ nur ungefähr $1/1000$ sei, und es würde sich daraus im Vergleich mit den verschiedenartigen Körper $n = 1/27$ bis $1/23$ ergeben.

Indess ist diese Betrachtung von Glan nicht consequent. Denn das n in seiner Formel enthält die Amplitude von Sonnenlicht in der Nähe der Erdoberfläche, eine für

1) Aross, Wied. Ann. 24. p. 180. 1885.

2) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. Edinb. 21. p. 57. 1854.

3) Glan, Wied. Ann. 7. p. 658. 1879.

4) E. Wiedemann, Wied. Ann. 17. p. 986. 1882.

diese Betrachtung ganz willkürliche Grösse. Dieselbe Forderung, dass der Aether nicht zerreisst, muss aber auch für Sonnenstrahlen in ihrer grössten Intensität gelten, also in der Nähe der Sonnenoberfläche, wo die Intensität 46400 mal so gross ist, als an der Erde. Danach wäre also:

$$\sqrt{1 + 46400n^2} - 1 = \frac{1}{1000}$$

und daher $n^2 = 4,2 \cdot 10^{-8}$. Also ergibt sich die untere Grenze für die Dichtigkeit des Aethers:

$$s > 1 \cdot 10^{-18}$$

Durch diese beiden ganz verschiedenen Betrachtungen ist die Dichtigkeit des Aethers in nicht zu weite Grenzen eingeschlossen. Es ist:

$$s < 90 \cdot 10^{-17} \text{ aber } > 0,1 \cdot 10^{-17}$$

Man würde danach sagen können, dass die Dichtigkeit des freien Aethers höchstens hundertmal grösser oder kleiner ist, als der 10^{17} . Theil von der des Wassers, ein Werth, der wohl viel grösser ist, als man ihn unwillkürlich schätzt. Während die Luft der Atmosphäre über einem Quadratmeter mehr als 10000 kg wiegt, würde der in ihr enthaltene Aether, die Höhe der Atmosphäre zu 30 Meilen gerechnet, nur 0,0022 mg wiegen.

Nimmt man den Werth $s = 10^{-17}$ einmal als angenähert gültig an, so gestattet die Thomson'sche Formel noch einige interessante Folgerungen. Aus diesem Werth von s berechnet sich zunächst:

$$n \cong 0,000\,067.$$

Bezeichnen wir also die grösste Geschwindigkeit eines schwingenden Aethertheilchens mit v , die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes mit V , so ist:

$$v \cong 0,000\,067\,V.$$

Die Verrückungen der Aethertheilchen in einem geradlinig polarisirten Lichtstrahl lassen sich ausdrücken durch:

$$u = A \sin \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right) 2\pi,$$

mithin die Geschwindigkeit durch:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{2\pi A}{T} \cos \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta \right) 2\pi.$$

Die grösste Geschwindigkeit eines Aethertheilchens (absolut genommen) ist also:

$$v = \frac{2\pi A}{T},$$

wo A die Amplitude der Lichtbewegung ist. Daher haben wir:

$$A = \frac{\pi TV}{2\pi} \cong \frac{0,000\,067\,\lambda}{2\pi},$$

also $A \cong 6 \cdot 10^{-10}$ cm.

Danach ist die Amplitude von kräftigem Sonnenlicht an der Erdoberfläche grösser oder gleich $6 \cdot 10^{-10}$ cm.

Da in festen und flüssigen Körpern der Abstand der Moleküle (und ihre Grösse) kleiner ist, als 10^{-8} cm, so sieht man, dass die Amplituden der Lichtschwingungen höchstens etwa hundertmal geringer sind, als diese Abstände. Mithin müssten Lichtstrahlen von höchstens der 2500fachen Intensität des Sonnenlichtes (an der Erdoberfläche) in festen und flüssigen Körpern schon wesentlich anderen Absorptionsverhältnissen unterliegen. Für sie wäre die Durchsichtigkeit vermuthlich eine relativ viel geringere. Andererseits ist auch daraus ersichtlich, dass bei den verhältnissmässig schwachen Intensitäten, mit denen wir es zu thun haben, die Absorptionsfähigkeit der Medien unabhängig von der Intensität des Lichtes ist.

Zum Schluss sei noch an die Bemerkung von W. Thomson erinnert, dass die Dichtigkeit der Luft, wenn sie immer dem Mariotte'schen Gesetz folgte und bei constanter Temperatur bliebe, schon in einer Höhe gleich dem Erdradius nur ungefähr 10^{-250} von der des Wassers wäre. Der Aether ist also ganz ausserordentlich viel dichter, als soweit verdünnte Luft. Unter dieser Voraussetzung würde schon in einer Höhe von 33 Meilen die Luft dieselbe Dichtigkeit haben, wie der freie Aether.

München, Ende Februar 1885.

IV. Ueber spontane, durch innere Kräfte
hervorgerufene Formänderungen krystallisirter
fester Körper; von O. Lehmann.

(Hierzu Taf. II Fig. 3 a—z.)

Zu vorliegender Mittheilung veranlassen mich einige Beobachtungen über freiwillige Structuränderungen fester Körper, welche von einer Aenderung der äusseren Form begleitet sind. Die Versuche sind ausgeführt mittelst des vereinfachten Krystallisationsmikroskops, welches ich in der Zeitschrift für Instrumentenkunde¹⁾ vor kurzem beschrieben habe.

I. Chinonhydroadicarbonsäureester.²⁾

Aus heisser Lösung in Anilin, die zweckmässig durch Zusatz von etwas Colophonium verdickt wird, krystallisiren zunächst weisse (d. h. farblose) Blättchen, deren Begrenzung die Form eines Parallelogrammes von 44° Winkel hat (Fig. 3_a). Zuweilen tritt von den kürzeren Seiten noch eine weitere Krystallfläche unter dem stumpferen Winkel von 72° hinzu, oder es erscheint auch letztere allein.

Sobald nun die Temperatur bis zu einem gewissen Punkte, dessen nähere Bestimmung mir noch nicht gelungen ist, sich erniedrigt hat, beginnen die Krystalle ihre Form zu ändern, derart, dass die längere Diagonale erheblich kürzer, die kürzere länger wird, und die Winkel der Umgrenzung statt 44 und 72° nunmehr 60 und 82° betragen. Gleichzeitig ändert sich die Färbung, welche in ein blaues, aber sehr deutlich wahrnehmbares Grün übergeht.

Während der Verschiebung bleibt eine Richtung, welche sehr nahe mit der kurzen Seite des Parallelogrammes (von

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 4. p. 369—376. 1884.

2) Dargestellt von Dr. Herrmann in Würzburg, dem ich das Präparat verdanke.

44^o) zusammenfällt, ungeändert. Dieselbe ist auch nahezu identisch mit einer der Hauptschwingungsrichtungen und Krystalle, welche zwischen gekreuzten Nicols in Dunkelstellung gebracht waren, erscheinen nach der Umwandlung wieder dunkel. Die Hauptschwingungsrichtungen werden somit durch die Umwandlung nicht geändert.

Die längeren Kanten der Krystalle drehen sich gegen die frühere Richtung um 15°, wie dies aus Fig. 3_b zu ersehen ist, welche einen zur Hälfte umgewandelten Krystall darstellt. Die umgeformte, grün gewordene Hälfte ist schraffirt und deren frühere Gestalt punktirt angedeutet.

Selten gelingt es, einen so einfachen Fall zu beobachten. Gewöhnlich beginnt die Umwandlung in der Mitte (Fig. 3_a) und oft an verschiedenen Stellen zugleich (Fig. 3_d), sodass man nebeneinander eine Reihe grüner Lamellen in den weissen Blättchen entstehen sieht. Die Enden der Krystalle verschieben sich dabei mit hinreichender Kraft um kleine Hindernisse oder auch den Krystall selbst in Bewegung setzen zu können. Fig. 3_c stellt einen völlig umgewandelten Krystall dar, dessen frühere Conturen punktirt angedeutet sind. Erwärmt man, so vollzieht sich die Verschiebung mit gleicher Präcision in entgegengesetztem Sinne, und zwar bei derselben Temperatur, bei welcher sie früher eingetreten war. Durch wiederholtes Erwärmen und Abkühlen über resp. unter die Umwandlungstemperatur kann man denselben Krystall beliebig oft diese Verschiebungen ausführen lassen. Man erhält dabei den Eindruck, als hätte man eine Art Nürnberger Scheere vor sich, die abwechselnd aufgezogen und wieder zusammengeschoben wird.

Wird die Lösung durch Zusatz von Colophonium stark verdickt, so tritt leicht Unterkühlung ein. Die Krystallbildung erfolgt erst bei niedriger Temperatur, und die Umwandlung findet dann nicht mehr oder sehr langsam statt. Haben sich also bereits mehrere grüne Lamellen in einer weissen Tafel gebildet, so werden dieselben mit fortschreitender Abkühlung an der weiteren Ausdehnung völlig gehindert.

Man sieht in solchem Falle bei länger fortgesetzter

Beobachtung die grünen Lamellen die weissen unter Vermittelung des Lösungsmittels allmählich aufzehren, wie Fig. 3_r zeigt, wobei die früheren Conturen des Krystalles punktirt angegeben sind. Erwärmt man bis in die Nähe der Verwandlungstemperatur, so erfolgt die Verwandlung wieder durch die feste Masse hindurch.

II. Protocatechusäure.¹⁾

Aus der heissen wässerigen (zweckmässig stark mit Phenol versetzten) Lösung scheiden sich beim Erkalten im einfachsten Falle prismatische (asymmetrische) Krystalle mit fast gerader Endfläche aus (Fig. 3_a). Während der Abkühlung sieht man plötzlich an den Enden oder auch an beliebigen Stellen in der Mitte Verschiebungen auftreten, derart, dass die kleine Endfläche und die Auslöschungsrichtungen für polarisirtes Licht ungeändert bleiben, der Körper aber eine solche Lage einnimmt, dass die Schiefe der Endfläche nunmehr 55° beträgt (Fig. 3_b). Die Verschiebung setzt sich rasch immer weiter fort, bis sich schliesslich das fast gerade (punktirt angedeutete) Prisma in ein sehr schiefes verwandelt hat (Fig. 3_i). Selten gelingt der Versuch in dieser einfachen Weise. Gewöhnlich ändert sich nach einiger Zeit die Richtung der Verschiebung in die entgegengesetzte (Fig. 3_k), ja es kann selbst eine häufige Wiederholung dieses Wechsels eintreten, bis zu solchem Grade, dass sich das Endprodukt von dem früheren scheinbar kaum anders, als durch eine feine Streifung der Oberfläche unterscheidet. Zuweilen spaltet sich der Krystall, und die eine Hälfte verschiebt sich nach rechts, die andere nach links (Fig. 3_j). Die Verschiebung erfolgt so rasch und leicht, dass man glauben könnte, eine flüssige Masse vor sich zu haben, durch welche sich momentan eine Erschütterung fortpflanzt. Die Kraft genügt, um die Krystalle in Bewegung zu setzen und kleine Hindernisse zu beseitigen. Ein bei reinen wässerigen Lösungen sehr oft zu beobachtender Fall ist ferner der, dass zunächst die schief-

1) Das Präparat wurde bezogen aus der chemischen Fabrik von Kahlbaum in Berlin.

prismatische Form auftritt, alsdann an einer Ecke ein geradprismatischer Auswuchs sich daran bildet (Fig. 3_m) und dieser nach einiger Zeit plötzlich umklappt, als wären die Moleculé um Charniere mit Anschlag drehbar. Das Gebilde erscheint dann so, wie es Fig. 3_n zeigt, stellt also dann einen einheitlichen Krystall dar.

III. Chlorammonium.

Aus heiss gesättigten, mit etwas Cadmiumchlorid verunreinigten Salmiaklösungen scheiden sich reguläre (aber schwach doppeltbrechende) Würfel aus, deren Seitenflächen stark gewölbt sind (Fig. 3_o). Man bemerkt ferner auf den Seitenflächen intensiv ausgeprägte diagonale Linien, welche die Grenzen von Ebenen bilden, die den Krystall in zwölf gleiche Sectoren eintheilen und andeuten, dass die Structur dieser Sectoren nicht ganz die gleiche ist. Nach Analogie anderer Fälle¹⁾ ist zu vermuthen, dass diese Störung der Structur darin begründet ist, dass sich in feinsten Vertheilung eine kleine Quantität des monosymmetrischen, doppeltbrechenden Doppelsalzes Cadmiumchlorid-Chlorammonium eingelagert hat, und zwar in den verschiedenen Sectoren in verschiedener Weise.

Ueberlässt man nun einen solchen Krystall sich selbst, so erfolgt nach einiger Zeit plötzlich ein heftiges Zucken, ja häufig zerspringt derselbe in mehrere Theile, welche trotz des immerhin beträchtlichen Widerstandes der Flüssigkeit auf relativ weite Strecken fortgeschleudert werden.

In günstigen Fällen bleibt die äussere Form ziemlich gut erhalten, allein die Seiten sind nicht mehr ausgebogen wie zuvor, sondern eben oder geradezu eingebogen (Fig. 3_p). Meist erscheint nach der Umwandlung allerdings die Oberfläche nicht mehr glatt, sondern rau und höckerig, und auch das Innere hat infolge von zahlreichen kleinen Sprüngen an Durchsichtigkeit beträchtlich eingebüsst und ist mehr oder minder trübe geworden. Ist selbst nach längerem Warten die Erscheinung nicht eingetreten, so lässt sie sich

1) Cf. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 8. p. 437 ff. 1888.

mit Sicherheit dadurch hervorrufen, dass man wieder etwas erwärmt.

Nach dem, was bereits hinsichtlich des Verhaltens von Salmiak bekannt ist¹⁾, darf wohl als sicher angenommen werden, dass hier nicht einfache Ausgleichung innerer Spannungen vorliegt, sondern allotrope Umwandlung, obschon sich nicht alle Kennzeichen einer solchen wirklich nachweisen lassen.

Theorien der allotropen Umwandlung.

Wie bereits eingangs erwähnt, sind die beschriebenen Fälle allotroper Umwandlung von anderen ähnlichen dadurch verschieden, dass die Aenderung der Structur nicht, wie gewöhnlich, unter Beibehaltung der früheren äusseren Form stattfindet, sondern mit einer deutlichen und im letzten Falle sogar sehr heftigen Verschiebung der Theilchen verbunden ist, welche die Gestalt des Krystalles ganz erheblich beeinflusst. Je nach der Theorie, welche wir zur Erklärung der Umwandlungserscheinung selbst zu Grunde legen, erhält diese Thatsache verschiedene Bedeutung, sodass es zweckmässig erscheint, die zur Zeit herrschenden Theorien hier kurz zusammenzustellen.²⁾

A. Theorie der Allotropie.³⁾

Diese Theorie fasst die beiden Zustände als chemisch isomere Körper auf, die sie nur deshalb mit besonderen Namen bezeichnet, weil die Umwandlung sehr leicht zu bewerkstelligen ist, während bei den eigentlich chemisch isomeren dieselbe überhaupt nicht oder nur mit grossen Schwierigkeiten oder auf indirectem Wege vorgenommen werden kann (ursprünglich wurde die Bezeichnung für chemische Isomerie bei Elementen gebraucht). Je nachdem man sich

1) Cf. O. Lehmann, Wied. Ann. 24. p. 4. 1885.

2) Die Theorie Naquet's (De l'allotropie et de l'isométrie, Paris 1860), welche die Atome selbst wieder aus kleinen Theilen zusammengesetzt denkt, habe ich als von den heutigen Anschauungen zu sehr abweichend nicht berücksichtigt.

3) Die Benennung von Berzelius 1841, Rapp. ann. s. l. progr. d. l. chim. p. 7.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXV.

die Moleküle aus einer verschiedenen Anzahl von Atomen bestehend denkt, wie Fig. 3_a andeutet, oder aus gleicher Zahl aber in verschiedener Anordnung (Fig. 3_r), hätte man chemische Polymerie oder Metamerie.

B. Theorie des Polymorphismus.

Die äussere Form eines Krystalles ist wesentlich bedingt durch die innere Structur desselben. Insofern nun zwei Modificationen eines Körpers in verschiedenen Systemen krystallisiren, wäre nach dieser Theorie der Unterschied nicht wie bei der vorigen in einer Verschiedenheit der Moleküle, sondern in verschiedener Zusammenlagerung derselben zum Krystall zu suchen. Es könnte z. B. wie Fig. 3, andeutet, in einem Falle die Anordnung in Form eines cubischen Raumbgitters stattfinden, im anderen in Form eines hexagonalen. Soweit ich es zu beurtheilen vermag, ist diese Theorie — deren Urheber mir unbekannt ist — die heute verbreitetste, ja nicht selten wird geradezu als Axiom angenommen, dass allotrope Modificationen nur krystallographisch, nicht chemisch verschiedene Zustände sind.

C. Theorie der Zwillingastructur.¹⁾

Manche in der Natur vorkommenden Krystalle erweisen sich als zusammengesetzt aus vielen kleinen Individuen, die gegenseitig in Zwillingsstellung stehen. Denkt man sich nun die einzelnen Individuen möglichst klein, d. h. als einzelne Moleküle, so gelangt man wieder zu regelmässigen Molekülsystemen, bei welchen weder die chemische Natur der Moleküle geändert ist, noch die Form des Raumbgitters, zu welchem sie (d. h. ihre Schwerpunkte) sich zusammenlagern, sondern lediglich deren Orientirung gegen die früheren Axen des Krystalles, etwa so, wie es Fig. 3_i andeutet, die Moleküle als kleine Kegel gedacht. Insofern dabei alle Stellungen sich regelmässig wiederholen, betrachtet Mallard jede Periode als neues Molekül und dehnt seine Theorie in dieser Art auch auf die chemische Polymerisation aus.

1) Mallard, Ann. d. Min. (7) 10. p. 60. 1876 u. Bull. d. l. soc. min. d. Fr. 7. p. 357. 1884.

D. Theorie der physikalischen Isomerie.¹⁾

Dieselbe wurde bedingt durch die moderne chemische Structurtheorie, welche sich gezwungen sieht, falls das Gesetz der festen Werthigkeiten aufrecht erhalten bleiben soll, neben Atomverbindungen noch Molecülverbindungen zu unterscheiden, welche mit den vorigen das gemein haben, dass sie Verbindungen nach festen Verhältnissen, somit eigentliche chemische Verbindungen sind. (A. Naumann's Theorie weicht hiervon ab, insofern er dieselben auf gleiche Stufe stellt mit den Verbindungen nach veränderlichen Verhältnissen, welche gewöhnlich als physikalische bezeichnet werden.)²⁾

Ebenso wie nun verschiedene Atomverbindungen zwischen gleichartigen Atomen möglich sind (chemisch isomere), müssen auch verschiedenartige Molecülverbindungen zwischen gleichartigen Molecülen möglich sein, d. h. physikalisch isomere (so genannt, weil die Aenderung in dem sogenannten physikalischen Molecül stattfindet, demjenigen kleinsten Theilchen, welches durch mechanische Theilung entstanden gedacht werden kann). Analog der chemischen Polymerie und Metamerie wären auch physikalische Polymerie (Fig. 3_a) und Metamerie (Fig. 3_v) zu unterscheiden.

Ich verzichte auf eine Discussion dieser verschiedenen Theorien und bemerke nur, dass mir aus einer Reihe von Gründen, zu welchen namentlich die Consequenzen derselben zählen, die letztere Theorie als die wahrscheinlichste erscheint.

Folgerungen aus der Theorie der physikalischen Isomerie.

Die eben erwähnten Consequenzen beziehen sich auf verschiedene Erscheinungen, die gewöhnlich als physikalische Vorgänge aufgefasst werden, nach dieser Theorie aber dem Gebiete der Chemie zuzuweisen sind, falls man überhaupt

1) Zincke, Lieb. Ann. 182. p. 244. 1876 u. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 97. 1877.

2) Cf. O. Lehmann, Ber. d. d. chem. Ges. 17. p. 1733. 1884.

Bildung von Verbindungen nach festen Verhältnissen als chemische bezeichnet. Es sind:

I. Die drei Aggregatzustände eines Körpers.

Eis, Wasser, Dampf z. B. sind drei chemisch (aber nur hinsichtlich der Constitution der „physikalischen“, nicht der „chemischen“ Molecüle) verschiedene Körper. Dass es gerade drei sind, ist nicht allgemeine Regel. Salpetersaures Ammoniak hat z. B. vier feste und eine flüssige Modification, Schwefel drei feste, zwei (oder drei) flüssige und ein (oder zwei) gasförmige u. s. w.

Die gewöhnliche Definition der Begriffe gasförmig, flüssig und fest wird dadurch nicht geändert, nämlich:

a) gasförmige Körper sind solche, bei welchen die Expansivkraft (abstossende Kraft der Wärme, Wirkung der molecularen Stösse) die Molecularattraction überwiegt, welche also keinen negativen Druck (Zug) aushalten können. Stark verdichtete Kohlensäure z. B. ist hiernach über der kritischen Temperatur (Andrews) gasförmig, unter derselben flüssig.

b) flüssige Körper sind solche, bei welchen die Molecularattraction der Expansivkraft das Gleichgewicht halten kann und auch ohne Einwirkung äusserer Kräfte eine Verschiebung der Theile (Diffusion) möglich ist. Der negative Druck, welchen sie ertragen können, bildet ein Maass für ihre Cohäsion. Der Aggregatzustand einer Lösung von Harz in Terpentinöl z. B. ist hiernach je nach dem Mischungsverhältnisse so lange noch als flüssig zu bezeichnen, als sich noch eine Spur von Diffusion beobachten lässt, vorausgesetzt, dass das Harz wirklich unbeschränkt löslich ist und sich nicht etwa schliesslich gallertartig ausscheidet.

c) feste Körper sind solche, bei welchen die Molecularattraction der Expansivkraft das Gleichgewicht hält, aber ohne Einwirkung äusserer Kräfte Verschiebung der Theilchen (Diffusion) nicht möglich ist.¹⁾ Drehung der Theilchen muss zur Erklärung der Erscheinungen der elastischen Nach-

1) Maxwell's Definition (Theorie d. Wärme, übers. v. Auerbach p. 288) weicht hiervon durchaus ab.

wirkung und der Magnetisirung noch als möglich betrachtet werden. Gallerten sind physikalisch inhomogen.

Nach der Theorie der physikalischen Isomerie kann also chemisch ein- und derselbe Körper stets nur in einem Aggregatzustande auftreten. Continuirliche Uebergänge eines Körpers aus einem Aggregatzustand in einen anderen (van der Waals) sind unmöglich. Wo solche scheinbar doch auftreten, wird angenommen, dass eine Mischung zweier Modificationen vorliege, deren chemisches Gleichgewicht von Temperatur und Druck abhängig ist.

II. Anomalien des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes.¹⁾

Die Theorie der physikalischen Isomerie rechnet dieselben zu den Dissociationserscheinungen. Sie nimmt an, dass sich in der Nähe des Condensationspunktes bereits die flüssige Modification bildet, sich aber nicht ausscheidet, sondern im Gase gelöst bleibt. Je tiefer die Temperatur sinkt, oder je höher der Druck steigt, umsomehr wächst der Procentgehalt dieser Lösung an flüssiger Substanz, bis schliesslich beim Condensationspunkt eine weitere Steigerung unmöglich wird, insofern sich jeder Ueberschuss alsbald ausscheidet. Eine wesentliche Stütze erhält diese Ansicht durch die Beobachtung, dass sich Flüssigkeiten in fremden Gasen lösen können.²⁾

1) Vgl. die Untersuchungen von Regnault, Cahours, Bineau Horstmann, A. Naumann, Schoop, Natterer, Amagat, Cailletet u. a. und die Theorien von: Horstmann, Lieb. Ann. Supplbd. 6. p. 51. 1868; Recknagel, Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 563. 1871; van der Waals, 1873. Ueber die Continuität etc., welche die Erscheinung auf Grund der Hypothese der Continuität erklären, und diejenigen von Playfair u. Wanklyn, Lieb. Ann. 122. p. 247. 1862; A. Naumann, Lieb. Ann. 155. p. 325. 1870; O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 97. 1877; Ramsay, Proc. of the London Roy. Soc. 30. p. 323. 1880, welche entweder chemische oder physikalische Isomerie annehmen, wobei Naumann's Theorie, insbesondere in ihrer neuen Form (Thermochemie, 1882) eine vermittelnde Stellung einnimmt, insofern sie die Molecularverbindungen nach festen Verhältnissen auf gleiche Stufe stellt mit den Mischungen nach veränderlichen Verhältnissen.

2) Cf. Andrews, Proc. Lond. Roy. Soc. 24. p. 455. 1876; Cailletet, Compt. rend. 90. p. 210. 1880; Dewar, Proc. Lond. Roy. Soc. 30. p. 538.

III. Anomalien der Ausdehnung und Compressibilität der Flüssigkeiten bei höheren Temperaturen und Drucken.¹⁾

Die Erklärung ist ganz analog der vorigen. Mit steigender Temperatur tritt Dissociation der Flüssigkeit ein, der entstehende Dampf gelangt indess nur theilweise zur Ausscheidung und bleibt grösstentheils in der Flüssigkeit gelöst. Es bilden sich somit ähnlich wie beim Vermischen mancher Flüssigkeiten zwei Gleichgewichtszustände aus, eine Lösung von wenig Dampf in viel Flüssigkeit und eine solche von wenig Flüssigkeit in viel Dampf. Die kritische Temperatur ist diejenige, für welche die Zusammensetzung beider Lösungen identisch wird. Eine Stütze findet die Anschauung darin, dass das specifische Volumen von Flüssigkeiten auch mit dem Gehalt an absorbirten fremden Gasen zunimmt.²⁾

IV. Anomalien der Capillarität.

Die Oberflächenspannung wird durch Erhöhung der Temperatur vermindert und erreicht bei der kritischen Temperatur den Werth 0.³⁾

Es erklärt sich dies durch die steigende Beimischung von Dampf, wie dann auch die gleiche Erscheinung beobachtet wird bei Zumischung eines fremden Gases.⁴⁾

V. Dichtemaximum des Wassers.

Es wird angenommen, dass sich im Wasser bereits vor dem Gefrieren Eis bildet, welches aber zunächst nicht zur Ausscheidung gelangt, sondern erst bei 0°. Da das Eis geringere Dichte besitzt, als das Wasser, muss diese Beimischung die Concentration der Lösung beim Abkühlen vermindern, bis sie schliesslich gleich Null wird und in Ausdehnung übergeht. Diejenigen Umstände, welche den Gehalt an Eis vermindern können, d. h. Druck und Beimischung

1880; Kundt, Wied. Ann. 12. p. 538. 1881; Strauss, Beibl. 4. p. 292. 1880; Ansdell, Beibl. 7. p. 257. 1882.

1) Cf. Cagniard de la Tour, Ann. de chim. et de phys. 21. p. 177. 1822; Amagat, Compt. rend. 85. p. 27 u. 139. 1876; Avenarius, Beibl. 2. p. 211. 1877.

2) Cf. Nichols und Wheeler, Phil. Mag. (6) 11. p. 113. 1881.

3) Cf. Hannay, Proc. Lond. Roy. Soc. 33. p. 294. 1882.

4) Cf. Kundt, Wied. Ann. 12. p. 538. 1881.

einer indifferenten Substanz, welche die Lösung verdünnt, müssen das Dichtemaximum erniedrigen, wie dies thatsächlich beobachtet wurde.¹⁾

VI. Specifische Wärme des Wassers.

Wenn beim Erwärmen von Wasser in der Nähe des Gefrierpunktes Dissociation des noch darin enthaltenen Eises stattfindet und in der Nähe des Siedepunktes Dissociation des Wassers in Dampf, d. h. Bildung einer geringen Menge Dampf, die nicht zur Ausscheidung gelangt, so muss die specifische Wärme des Wassers sowohl in der Nähe des Gefrierpunktes, wie in der Nähe des Siedepunktes zunehmen.

Die Messungen von Velten²⁾ bestätigen dies.

VII. Schmelzpunkt von Gemengen.

Insofern sich Schmelzflüsse in der Nähe des Erstarrungspunktes als Lösungen der festen Modification (oder auch mehrerer festen Modificationen) in der flüssigen auffassen lassen, müssen sich diese Lösungen, falls sie mischbar sind, gegenseitig verdünnen, der Krystallisations-, d. h. Erstarrungspunkt muss somit erniedrigt werden.³⁾

VIII. Zunahme der Löslichkeit mit der Temperatur.

Körper, welche niedrigen Schmelzpunkt besitzen, werden bei höheren Temperaturen zum Theil in der festen, zum Theil in der flüssigen Modification sich in Lösung befinden, bis schliesslich (bei Temperaturen über dem Schmelzpunkt) die Lösung nur ein Gemisch der beiden Flüssigkeiten darstellt. Die Löslichkeit muss in solchen Fällen rasch anwachsen, wie dies auch die Erfahrung bestätigt.⁴⁾

IX. Existenz mehrerer Schmelz- und Sättigungspunkte.

Körper, welche in mehreren festen Modificationen auftreten, besitzen entsprechend mehrere Schmelz- und Sättigungspunkte (festere natürlich nur dann, wenn es möglich ist, die Modification unverändert bis zum Schmelzen zu er-

1) Cf. Marshall, Smith u. Osmond, Proc. Edinb. Roy. Soc. 11. p. 626 u. 809. 1882; Nichols u. Wheeler, Phil. Mag. (5) 11. p. 113. 1881.

2) Velten, Wied. Ann. 21. p. 31. 1884.

3) Cf. O. Lehmann, Wied. Ann. 24. p. 1. 1884.

4) Cf. Tilden u. Shenstone, Proc. Lond. Roy. Soc. 35. p. 345. 1883.

hitzen). Bei welchem dieser Punkte die Erstarrung erfolgt, ist insbesondere davon abhängig, wie stark der Schmelzflüssigkeit erhitzt war, und wie rasch die Abkühlung erfolgte. Durch die Annahme der Lösung der festen Modification in der flüssigen schliesst sich diese Erscheinung ganz den analogen Erscheinungen bei chemischer Dissociation an.

X. Analogien zwischen krystallwasserhaltigen Salzen und allotropen Modificationen.

Das Zerfallen bei dem Erwärmen in gesättigter Lösung und die Rückbildung beim Erkalten, sowie auch das „Aufzehren“ unter Vermittelung des Lösungsmittels sind so ähnliche Erscheinungen, dass bei Substanzen, welche wasserhaltig krystallisiren, die Entscheidung, ob Aufnahme (Abgabe) von Krystallwasser oder Umwandlung in eine allotrope Modification vorliegt, mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden ist.¹⁾

XI. Lösung fester Körper in Gasen und Sublimation.

Analog wie oben die Condensation eines Gases in Flüssigkeitströpfchen ist die Sublimation zu erklären. Dass wirklich feste Körper in Gasen sich lösen können, ist dargethan durch die Versuche von Hannay und Hogarth²⁾

XII. Wärmetönung beim Schmelzen und Sieden.

Die Schmelz- und Verdampfungswärmen sind hinsichtlich der Grössenordnung den Wärmetönungen bei Bildung von krystallwasserhaltigen Salzen und Doppelsalzen sehr ähnlich, wie dies nach der Theorie zu erwarten steht.

XIII. Lösung und Quellung.

Es ist zu unterscheiden zwischen wahrer und scheinbarer Löslichkeit. Erstere ist die Quantität des festen Körpers (in Proc.), welche wirklich in der Flüssigkeit (Gase) enthalten ist, letztere die Quantität, die sich darin aufgelöst hat. Nur letztere lässt sich experimentell bestimmen und hat praktischen Werth, erstere dagegen dient allein der theoretischen Betrachtung

1) Cf. auch van t'Hoff, *Études de Dynamique chimique* 1884.

2) Hannay u. Hogarth, *Proc. Lond. Roy. Soc.* 29. p. 324. 1873. 30. p. 178 u. 484. 1880.

und darf nicht mit den beiden anderen verwechselt werden. Dass eine Differenz zwischen beiden besteht, beruht auf der Möglichkeit, dass der aufgelöste Körper zum Theil (molecular) unverändert in Lösung übergeht, zum Theil zerfällt in Moleculc einer anderen festen oder flüssigen (gasförmigen) Modification, oder auch mit den Moleculen der Flüssigkeit neue Complexe bildet. Durch letzteren Umstand wären die Anomalien der Löslichkeit, Ausdehnung und specifische Wärme mancher Lösungen zu erklären. Bei der Umwandlungstemperatur zweier physikalisch isomerer Modificationen (oder anderer Molecularverbindungen) ist die scheinbare Löslichkeit für beide gleich, über oder unter derselben verschieden. Für Temperaturen über oder unter derselben existiren somit zwei verschiedene Sättigungsgrade, je nachdem man die Lösung der einen oder anderen Modification betrachtet. Bei Lösungen in Gasen macht sich die nämliche Erscheinung durch Verschiedenheit der Dampfspannungen bemerkbar. Für bestimmten Gehalt der Lösung existiren aus gleichem Grunde zwei verschiedene Sättigungstemperaturen. Man könnte dieselben als normale bezeichnen zum Unterschied von solchen in Bezug auf fremde (z. B. isomorphe) Substanzen, die ebenfalls im Stande sind, die Krystallisation einzuleiten. Quellung (z. B. von Krystalloiden)¹⁾ als Diffusion der Flüssigkeit in dem festen Körper aufgefasst, ist ebenfalls eine Art Lösung, bei welcher aber die Structur des festen Körpers bis zum sogenannten Schmelzpunkt erhalten bleibt. Dieses Schmelzen (z. B. von Gallerte) ist somit als eine von dem Schmelzen im gewöhnlichen Sinne (Umwandlung) wesentlich verschiedene Erscheinung zu betrachten.

XIV. Krystallisationskraft.

Auch hier ist zu unterscheiden zwischen wahrer und scheinbarer Krystallisationskraft. Erstere ist als die Resultante sämmtlicher auf ein in Anlagerung an den Krystall begriffenes Molecul wirkender Molecularkräfte, also auch der des Lösungsmittels und der darin enthaltenen Modificationen oder fremden Stoffe aufzufassen. Sie ist auf künstlich an-

1) Cf. Schimper, Zeitschr. f. Kryst. 5. p. 131. 1881.

geschliffenen Flächen grösser als auf den natürlichen, welche somit auch Flächen minimaler Krystallisationskraft genannt werden können, ferner auf den Flächen grösser als auf Kanten und Ecken. So wenigstens lässt sich bis jetzt allein die sogenannte „Ergänzung“ verletzter Krystalle beim Weiterwachsen und das Auftreten eines bestimmten von Lösungsmittel, Temperatur etc. abhängigen Krystallhabitus erklären. Ihre Wirkung ist nicht allein eine attraktive, sondern auch richtende. Die letztere kann durch Anwesenheit von Hindernissen, z. B. von Verdickungsmitteln beeinträchtigt werden, derart, dass der wachsende Krystall sich mit Zwillinglamellen besetzt oder gar pinselartig zerfasert und sich schliesslich zu einem kugeligen Aggregat von strahliger Structur, einem sogenannten Sphärolithen ausbildet. Die scheinbare Krystallisationskraft ist diejenige, auf welche wir schliessen aus den Arbeitsleistungen, welche wachsende Krystalle auszuführen im Stande sind, z. B. Heben ihres eigenen Gewichts, Deformation plastischer Substanzen, Zersprengen spröder Körper u. dergl.)

Analogie zwischen elastischer Verschiebung und allotroper Umwandlung.

Allotrope Umwandlung gleicht äusserlich sehr dem Uebergang elastischer gespannter Körper aus einer Gleichgewichtslage in eine zweite (z. B. Auf- und Zuklappen eines Taschermessers und ist ebenso wie diese von Kraftwirkungen begleitet, die erhebliche Arbeitsleistungen auszuführen im Stande sind. Sind nun aber, wie es die Theorie der physikalischen Isomerie annimmt, die Moleküle zweier Modificationen chemisch voneinander verschieden, so wären diese Kräfte in bemerkenswerther Weise verschieden von denjenigen, welche die gewöhnlichen elastischen Verschiebungen bedingen, insofern sie wenigstens theilweise chemischer Natur sind.

Unter Elasticität versteht man zwei verschiedene Erscheinungen:

I. Volumenelasticität. — Jeder homogene Körper, dessen Volumen verkleinert (vergrössert) worden ist, sucht mit einer gewissen Kraft sein normales Volumen wieder zu erreichen.

1) Cf. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 487. 1877.

II. Verschiebungselasticität. — Eine Aenderung der Structur ohne Volumenänderung (z. B. die Dehnung eines Quadrats zu einem inhaltsgleichen Rechteck oder Rhombus, oder eine Torsion wie sie Fig. 3, andeutet) weckt eine Kraft, die die Aenderung wieder rückgängig zu machen sucht, wenigstens bis zu der sogenannten Elasticitätsgrenze.

Ganz analog zum Falle I sucht eine durch Aenderung des Druckes bei constantem Volumen bewirkte allotrope Verwandlung (z. B. bei Schwefel¹⁾, Jodsilber²⁾ mit einer bestimmten Kraft wieder rückgängig zu werden, und zwar ist diese Kraft von der Temperatur abhängig, entweder positiv oder negativ speciell bei der Verwandlungstemperatur = 0.

Die Analogie zum Falle II bildet die drehende Wirkung, welche (z. B. bei Protocatechusäure, Chinonhydrodicarbonsäure-ester) die Molecüle der einen Modification an der Grenzfläche auf diejenige der anderen ausüben. Schon eine geringe entgegenwirkende äussere Kraft genügt, um sie zu compensiren, verstärkt man aber die Wirkung durch geeignete Aenderung der Temperatur, so tritt Gleiten der Molecüle ein, d. h. bleibende Deformation³⁾ ganz ähnlich wie im Falle zu starker elastischer Verschiebung. Wird eine Substanz, z. B. Pech, Siegelack langsam deformirt, so bleibt der Zusammenhang erhalten, erfolgt die Deformation dagegen rasch, so erfolgt Bruch, der Körper zersplittert. Als Analogie hierzu liesse sich vielleicht die bei Salmiak besprochene Erscheinung auffassen, in welchem Falle die Krystalle durch die Umwandlung zertrümmert werden.

Trichitenbildung und Oberflächenspannung fester Körper.

Ist die Anschauung, welche man sich über die Entstehung der Oberflächenspannung bei Flüssigkeiten bildet, richtig, so

1) van t'Hoff, Étud. de dynamique chimique. p. 152. 1884.

2) Mallard u. Le Chatelier, Comp. rend. 99. p. 157. 1884.

3) Dass auch bei homogenen Krystallen selbst beträchtliche bleibende Deformationen ohne Störungen des Zusammenhanges möglich sind, zeigen die Beobachtungen über das Auftreten von Gleitflächen (cf. Reusch, Pogg. Ann. 132. p. 441. 1867, und über die künstliche Zwillingsbildung bei Kalkspath, wobei die Molecüle sich sogar um einen beträchtlichen Winkel drehen, ohne ihren Zusammenhang zu verlieren. (cf. Reusch, l. c.)

muss eine solche Kraft auch an der Oberfläche fester, selbst krystallisirter Körper vorhanden sein, wenn schon ihre Wirkungen infolge der Starrheit der Masse ganz verschwindende sind. Es gibt nun eine Reihe von Substanzen, welche in Form äusserst feiner mikroskopisch kleiner Haare oder sehr dünner Blättchen (Trichiten)¹⁾ krystallisiren, die so ungemein biegsam sind, dass schon Flüssigkeitsströmungen Krümmungen hervorrufen können, ja, dass man, ohne einen Bruch befürchten zu müssen, ein solches Blättchen wie ein dünnes Papier zur Spirale zusammenrollen kann (durch Verschiebung des Deckglases auf dem Objectträger, z. B. bei Zimmtsäure.) Man könnte vermuthen, dass sich vielleicht bei solchen Trichiten Wirkungen der Oberflächenspannungen nachweisen liessen, etwa Verbiegungen herrührend von der Differenz der Spannungen an verschiedenen scharfen Ecken, da ja mit der Schärfe derselben sich entsprechend auch die nach innen gerichtete Resultante der Molecularkräfte ändert.

Thatsache ist, dass sich Trichiten bei ihrer Entstehung in der Regel (falls sie nur hinreichend fein sind) ohne erkennbare äussere Ursache beträchtlich krümmen und verdrehen, bei der allmählichen Verdickung aber mit Vehemenz gerade strecken und nicht selten dabei zerspringen. Tritt eine solche Streckung nicht ein, so wächst auch der gebogene Krystall gleichmässig weiter, und die optischen Eigenschaften desselben ändern sich von Stelle zu Stelle ganz stetig, durchaus der krystallographischen Orientirung entsprechend. Beispiele zeigen die Figuren 3₂₋₅. Ob nun diese Erscheinungen wirklich durch Oberflächenspannung bedingt sind oder durch andere Ursachen hervorgerufen werden, liess sich bis jetzt nicht entscheiden. Jedenfalls muss eine Theorie des festen Aggregatzustandes im Stande sein, auch diese eigenthümliche Erscheinung zu erklären.

Aachen, im März 1885.

1) cf. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 1. p. 464. 1877.

V. Zur Theorie des longitudinalen Stosses
 cylindrischer Körper;
 von Victor Hausmaninger in Graz.

(Aus den Sitzungsber. der königl. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin, vom
 29. Jan. 1885; mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Eine von der gewöhnlichen Newton'schen abweichende Theorie des elastischen Stosses cylindrischer Stäbe wurde bekanntlich zuerst von Cauchy¹⁾ und St. Venant²⁾ entwickelt. Aus Versuchen von Hrn. Boltzmann³⁾, Hrn. Voigt⁴⁾, und mir⁵⁾ geht zweifellos hervor, dass in der That der Erfolg des Stosses zweier cylindrischer Stäbe ausser von den Massen auch von der Zeit der Rückkehr der Longitudinalwelle bedingt ist, die in jedem Stab entsteht und an dessen freiem Ende reflectirt wird, und dass demnach immer Abweichungen von der alten Stosstheorie im Sinne der St. Venant'schen auftreten.

Diese Abweichungen sind jedoch niemals ganz so gross, meist sogar bedeutend kleiner, als sie die St. Venant'sche Theorie erfordert. Eine Vermittelung dieser letzteren und der alten Theorie schien daher sehr wünschenswerth. Eine solche wurde bisher meines Wissens nur von den Herren W. Voigt und H. Hertz versucht. Hr. Voigt sieht die Ursache der Abweichung zwischen der Theorie St. Venant's und der Erfahrung in der dieser Theorie zu Grunde liegenden Annahme, wonach beide Stäbe von dem Momente an, wo überhaupt eine merkliche Wechselwirkung beginnt, sich sofort in ihren gesammten Endflächen direct berühren und genau wie zwei vollkommen fest verbundene Körper aufeinander wirken. In diesem Falle können aber die Stäbe nach Hrn. Voigt's Ansicht nicht durch eine beliebig kleine Dilation getrennt werden, und wenn dieselbe gross genug wäre, um die Cohäsion eines Stabes selbst zu überwinden, so

1) Cauchy, Bull. de Sc. d. l. Soc. Phil. p. 180. 1826.

2) St. Venant, Liouville's Journ. 12. p. 237. 1867.

3) L. Boltzmann, Wien. Ber. 84. p. 1225. 1881.

4) W. Voigt, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1882. p. 683.

5) V. Hausmaninger, Wien. Ber. 88. p. 162. 1883.

würde — bei gleicher Beschaffenheit der Stäbe — eine Trennung des ganzen Systems nicht gerade an der Berührungsstelle, sondern dort erfolgen, wo die Dilatation zuerst auftritt. Da nun bei dem Phänomen, das man gemeinlich als „Stoss“ bezeichnet, die Trennung immer an der Berührungsstelle erfolgt, so schliesst Hr. Voigt, dass die beiden Stäbe während ihrer Berührung nicht als Ganzes anzusehen sind, sondern dass vielmehr infolge verschiedener Ursachen (Krümmung, Unebenheiten und namentlich condensirte Gasschichten an den stossenden Endflächen) ein von zwei der Berührungsstelle unendlich nahen Querschnitten begrenztes Element, die sogenannte „Zwischenschicht“, ganz andere Eigenschaften besitzt, als ein Element im Inneren der Stäbe. Den Einfluss dieser Zwischenschicht zieht nun Hr. Voigt durch Einführung einer gewissen Constanten c in Rechnung, deren Abhängigkeit von der Natur der Zwischenschicht durch die Beziehung:

$$c = \frac{e \cdot q}{\delta}$$

bestimmt ist. Darin ist q der Querschnitt, δ die Dicke und e der während des Stosses als constant vorausgesetzte und darum als der „mittlere“ bezeichnete Elasticitätscoefficient der Zwischenschicht. Für $c = \infty$ geht die Voigt'sche Theorie in die St. Venant'sche, für $c = 0$ in die alte Stosstheorie über. Eine Wechselwirkung zwischen beiden Stäben findet so lange statt, als an ihrer Berührungsstelle eine Compression vorhanden; den Moment, wo die Dilatation sich zu bilden beginnt, bezeichnet Hr. Voigt als das Ende des Stosses.

Nach Hrn. Hertz¹⁾ findet infolge der Krümmung der Endflächen die Berührung im ersten Momente nur in einem Punkte und im Verlaufe des ganzen Stosses immer nur in einem Kreise statt, dessen Flächeninhalt kleiner als jede der Endflächen ist.

Die beiden genannten Herren haben jedoch ihre Theorien nur soweit entwickelt, dass sie zeigten, dass dieselben

1) H. Hertz, Borchardt's Journ. 92. p. 156. 1882.

mit der alten Newton'schen Theorie übereinstimmen, wenn die erzeugte Longitudinalwelle die beiden Stäbe während der Dauer ihrer Wechselwirkung sehr oft durchläuft. Dagegen haben sie gar keine Rechnungen zur Bestimmung der Abweichungen ihrer Theorien von der alten Newton'schen versucht. Eine Annäherungsformel für diese Abweichungen wurde von Hrn. Boltzmann aus der Voigt'schen Theorie entwickelt und von mir in meiner citirten Abhandlung mitgetheilt. Doch auch diese bezieht sich nur auf den Fall, dass der von der Welle während der Stossdauer zurückgelegte Weg λ gross ist gegenüber der Länge der Stäbe. Da nun sowohl meine Messungen der Stossdauer, als auch die Grösse der experimentell gefundenen Abweichungen von den alten Stossformeln es mir wahrscheinlich machten, dass obige Bedingung nur in geringem Grade erfüllt ist, so hielt ich es nicht für überflüssig, zunächst die Voigt'sche Theorie gerade im entgegengesetzten Falle, wo λ nicht viel grösser ist, als die doppelte Länge des längeren Stabes, für ein Paar Specialfälle zu entwickeln. Denn eine Vergleichung mit der Erfahrung ist nur durch eine quantitative Berechnung der Abweichungen zwischen der alten und den neuen Theorien möglich. Eine analoge Behandlung der Hertz'schen Hypothese behalte ich mir für später vor. (Ein vorläufiger Vergleich der von mir beobachteten mit der nach den Hertz'schen Formeln berechneten Stossdauer zeigte eine ganz gute Uebereinstimmung.)

Ich lege mit Hrn. Voigt die Z -Axe in die Mittellinie der beiden Stäbe von ihrer Berührungsstelle aus, bezeichne mit $w, E_1, d_1, m_1, q_1, l_1$ Verschiebung, Elasticitätscoefficient, Dichte, Masse, Querschnitt und Länge des ersten, mit w_2, E_2, d_2, m_2, q_2 und l_2 die analogen Grössen des zweiten Stabes und setze zur Abkürzung:

$$\frac{E_1}{d_1} = a_1^2; \quad E_1 q_1 = b_1, \quad \frac{E_2}{d_2} = a_2^2; \quad E_2 q_2 = b_2,$$

dann ist die Hypothese des Hrn. Voigt in folgenden Gleichungen ausgesprochen:

$$(1) \quad \frac{d^3 w_1}{dt^3} = a_1^2 \frac{d^3 w_1}{dx^3}, \quad \frac{d^3 w_2}{dt^3} = a_2^2 \frac{d^3 w_2}{dx^3}.$$

$$(2) \quad \frac{dw_1}{dz} = 0 \text{ für } z = -l_1, \quad \frac{dw_2}{dz} = 0 \text{ für } z = l_2.$$

$$(3) \quad b_1 \frac{dw_1}{dz} = b_2 \frac{dw_2}{dz} = c(w_2 - w_1) \text{ für } z = 0.$$

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} w_1 = 0 \\ w_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ für } t = 0 \quad \begin{array}{l} -l_1 < z < 0 \\ 0 < z < l_2. \end{array}$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_1}{dt} = V_1^0 \\ \frac{dw_2}{dt} = V_2^0 \end{array} \right\} t = 0 \quad \begin{array}{l} -l_1 < z < 0 \\ 0 < z < l_2. \end{array}$$

Für meine Zwecke scheint mir die Integration obiger Gleichungen durch willkürliche Functionen auf übersichtlicherem Wege zum Ziele zu führen, als dies mit Hülfe periodischer Reihen möglich ist. Ich setze deshalb:

$$w_1 = f(z + a_1 t) + g(z - a_1 t)$$

$$w_2 = \varphi(z + a_2 t) + \gamma(z - a_2 t).$$

Gemäss der Bedingung (2) muss für die freien Stabenden:

$$f'(-l_1 + a_1 t) + g'(-l_1 - a_1 t) = 0,$$

$$\varphi'(l_2 + a_2 t) + \gamma'(l_2 - a_2 t) = 0$$

und zwar zu allen Zeiten sein; ich führe daher statt $a_1 t$ und $a_2 t$ die willkürliche Variable u ein, sodass:

$$f'(-l_1 + u) + g'(-l_1 - u) = 0$$

$$\varphi'(l_2 + u) + \gamma'(l_2 - u) = 0$$

wird. Daraus folgt:

$$(6) \quad g'(-u) = -f'(u - 2l_1), \quad \varphi'(u) = -\gamma'(-u + 2l_2).$$

Ich beschränke meine Rechnungen auf den wichtigsten Fall, dass das Material beider Stäbe dasselbe ist. Dann ist $a_1 = a_2$, und aus Gleichung (3) folgt:

$$b_1 f'(u) + b_1 g'(-u) = b_2 \varphi'(u) + b_2 \gamma'(-u)$$

$$b_1 f'(u) + b_1 g'(-u) = c\varphi(u) + c\gamma(-u) - cf(u) - cg(-u),$$

woraus man findet:

$$(7) \quad \gamma'(-u) = \frac{b_1}{b_2} f'(u) + \frac{b_1}{b_2} g'(-u) - \varphi'(u)$$

und:

$$(8) \quad f''(u) + \frac{c(b_1 + b_2)}{b_1 b_2} f'(u) = \frac{c(b_2 - b_1)}{b_1 b_2} g'(-u) + \frac{2c}{b_1} \varphi'(u) + g''(-u).$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) gelten für alle u . Gemäss der Bedingung (4) ist, wenn ich für z gleichfalls u schreibe:

$$(9) \quad \begin{aligned} f(u) + g(u) &= 0 \quad \text{für} \quad -l_1 < u < 0 \\ \varphi(u) + \gamma(u) &= 0 \quad \text{„} \quad 0 < u < l_2 \end{aligned}$$

und nach (5), wenn ich zur Abkürzung:

$$(10) \quad \frac{V_1^0}{2a_1} = s, \quad \frac{V_2^0}{2a_2} = \sigma$$

setze:

$$(11) \quad \begin{aligned} f'(u) - g'(u) &= 2s \quad \text{für} \quad -l_1 < u < 0 \\ \varphi'(u) - \gamma'(u) &= 2\sigma \quad \text{„} \quad 0 < u < l_2. \end{aligned}$$

Durch Ableitungen der Gleichungen (9) folgt in Verbindung mit (11):

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} f'(u) &= s \\ g'(u) &= -s \end{aligned} \right\} \text{für } u = -l_1 \text{ bis } u = 0$$

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} \varphi'(u) &= \sigma \\ \gamma'(u) &= -\sigma \end{aligned} \right\} \text{von } u = 0 \text{ bis } u = l_2.$$

Das Problem liesse sich allerdings noch weiter in voller Allgemeinheit behandeln, die Rechnung wird jedoch bald so complicirt, dass sich schon jetzt eine Specialisirung empfiehlt, um so mehr, als man es in der Praxis ja doch nur mit gewissen Specialfällen zu thun hat, in denen die Längen- und Querschnitte der Stäbe in einem bestimmten, einfachen rationalen Verhältnisse stehen. Ich werde erstens Stäbe von gleicher Länge und gleichem Querschnitt, zweitens Stäbe von gleichem Querschnitt, von denen der eine Stab doppelt so lang als der andere, drittens Stäbe, von denen der eine die doppelte Länge oder den halben Querschnitt des anderen besitzt, betrachten.

I. Fall.

$$l_1 = l_2 = l; \quad b_1 = b_2 = b.$$

Die Gleichungen (6), (7) und (8) gehen für diesen Fall über in:

$$(14) \quad g'(-u) = -f'(u - 2l),$$

$$(15) \quad \varphi'(u) = -\gamma'(-u + 2l),$$

$$(16) \quad \gamma'(-u) = f'(u) + g'(-u) - \varphi'(u),$$

$$(17) \quad f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) = \frac{2c}{b} \varphi'(u) + g'(-u).$$

Nun folgt aus (12) und (14):

$$g'(-u) = -s \quad \text{von } 0 \text{ bis } 2l,$$

ebenso aus (13) und (15):

$$\varphi'(u) = \sigma \quad \text{von } 0 \text{ bis } 2l.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (16) und (17), so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \gamma'(-u) &= f'(u) - s - \sigma \\ f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) &= \frac{2c\sigma}{b} \end{aligned} \right\} \quad 0 \text{ bis } 2l.$$

Die Integration der letzten Gleichung liefert, wenn ich zur Abkürzung:

$$\frac{2c}{b} = \alpha$$

setze:

$$\text{so dass: } \left. \begin{aligned} f'(u) &= (s - \sigma) e^{-\alpha u} + \sigma = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= f_1'(u) - (s + \sigma) \end{aligned} \right\} \quad 0 \text{ bis } 2l.$$

Weiter folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (15):

$$\left. \begin{aligned} g'(-u) &= -(s - \sigma) e^{-\alpha(u-2l)} - \sigma \\ \varphi'(u) &= -(s - \sigma) e^{-\alpha(u-2l)} + s \end{aligned} \right\} \quad 2l \text{ bis } 4l.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (17) erhält man:

$$\left. \begin{aligned} f''(u) &= (s - \sigma) e^{-\alpha u} \{ e^{2\alpha l} [-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1 \} + s = f_2''(u) \\ \text{und: } \gamma'(-u) &= f_2''(u) - (s + \sigma) \end{aligned} \right\} \quad 2l \text{ bis } 4l.$$

Analog findet man:

$$\left. \begin{aligned} g'(-u) &= -f_2'(u - 2l) \\ \varphi'(u) &= -f_2'(u - 2l) + (s + \sigma) \\ f''(u) &= (s - \sigma) e^{-\alpha u} \{ e^{4\alpha l} [2\alpha^2 u^2 - 16\alpha^2 l u + 32\alpha^2 l^2 + 1] + \\ &\quad + e^{2\alpha l} [-2\alpha u + 4\alpha l - 1] + 1 \} + \sigma = f_3''(u) \\ \text{und: } \gamma'(-u) &= f_3''(u) - (s + \sigma) \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{von} \\ 4l \\ \text{bis} \\ 6l \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} g'(-u) &= -f_3'(u - 2l) \\ \varphi'(u) &= -f_3'(u - 2l) + (s + \sigma) \\ f''(u) &= (s - \sigma) e^{-\alpha u} \{ e^{6\alpha l} [-\frac{1}{3}\alpha^3 u^3 + (24\alpha^3 l + 2\alpha^2)u^2 \\ &\quad - (144\alpha^3 l^2 + 24\alpha^2 l + 2\alpha)u + 288\alpha^3 l^3 + 72\alpha^2 l^2 + 12\alpha l - 1] \\ &\quad + e^{4\alpha l} [2\alpha^2 u^2 - 16\alpha^2 l u + 32\alpha^2 l^2 + 1] + e^{2\alpha l} [-2\alpha u \\ &\quad + 4\alpha l - 1] + 1 \} + s = f_4''(u) \\ \text{und: } \gamma'(-u) &= f_4''(u) - (s + \sigma). \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{von} \\ 6l \\ \text{bis} \\ 8l \end{array}$$

Ich sah von einer Ableitung des allgemeinen Bildungsgesetzes der Functionen f' , g' , q und γ' vorläufig ab und schlug folgenden, für meine Zwecke auch vollkommen genügenden Weg ein. Ich fragte mich, wie gross c , resp. α gewählt werden muss, damit der Stoss zu Ende ist, wenn die Welle ein bestimmtes, willkürlich angenommenes Wegstück λ durchlaufen hat, und berechnete hernach die dazu gehörigen Schwerpunktsgeschwindigkeiten. Der St. Venant'schen Theorie zufolge kann der Stoss erst für $\lambda = 2l$ zu Ende sein. Für diesen Fall wird nach der Hypothese des Hrn. Voigt c und somit auch die von mir mit α bezeichnete Grösse unendlich. Da nun derselben Theorie gemäss das α einen endlichen Werth besitzen soll, so muss $\lambda > 2l$ sein. Ich setze zunächst:

$$u = \lambda = 2l + \varepsilon l,$$

worin: $0 < \varepsilon \leq 2$.

Als Bedingung für das Ende des Stosses bilde ich:

$$\left(\frac{dw_1}{ds}\right)_{s=0}^{s=2l+\varepsilon l} = (s-\sigma)e^{-\alpha(2l+\varepsilon l)} \{e^{2\alpha l}[-2\alpha(2l+\varepsilon l) + 4\alpha l - 2] + 1\} + s - \sigma = 0,$$

oder:

$$(18) \quad e^{-2\alpha l} - 2\alpha \varepsilon l + e^{\alpha \varepsilon l} - 2 = 0.$$

Behufs bequemerer Rechnung bezeichne ich die reelle, positive Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$e^x = 2x + 2$$

mit ξ , sodass $\xi = 1,67835$ ist, und setze $\alpha \varepsilon l = \xi - \eta$. Dann geht Gleichung (18) über in:

$$(19) \quad e^{-2\alpha l} = 2(\xi + 1)(1 - e^{-\eta}) - 2\eta.$$

Für Berechnung einer Tabelle ist es am bequemsten, dem η willkürlich gewählte Werthe zu ertheilen und die zugehörigen Werthe von αl aus Gleichung (19) zu bestimmen, wobei es von Vortheil ist, die Exponentielle durch ihre Reihe zu ersetzen. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist:

$$v_1 = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 \left(\frac{dw_1}{dt}\right) dz, \text{ d. i.}$$

$$(20) \quad v_1 = \frac{a}{l} \int_{-1}^0 f(z+\lambda) dz - \frac{a}{l} \int_0^1 g'(z-\lambda) dz.$$

Die Substitution der entsprechenden Functionswerte liefert mit Berücksichtigung der Gleichung (18) für:

$$0 < \varepsilon \leq 2$$

$$(21) \quad \beta = \frac{1}{2\alpha l} \{2e^{-\alpha l} + \alpha \varepsilon l - 2\},$$

wenn $v_1 = \beta V_1^0 + (1 - \beta) V_2^0$ gesetzt wird, und nach Einführung von η folgende Reihenentwicklung:

$$(22) \quad \beta = \frac{1}{2\alpha l} [0,051\,714\,198 - \eta + 0,373\,364\,198] \left(\eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} + \dots \right),$$

welche, da selbst für grosse ε der Werth des η klein ist, auch noch bis $\varepsilon = 2$ ausserordentlich bequem ist.

Mit Hülfe der Formeln (19) und (22) habe ich nun unter Annahme verschiedener η die in der folgenden Tab. I zusammengestellten Werthe berechnet. Es zeigte sich dabei, dass der Verlust an lebendiger Kraft ein Maximum erreicht, wenn λ zwischen $3l$ und $4l$ liegt. Zur genaueren Bestimmung desselben ist nach (21) die Function:

$$\frac{\alpha \varepsilon l + 2e^{-\alpha \varepsilon l} - 2}{2\alpha l}$$

unter der Bedingung:

$$e^{-2\alpha l} + e^{2\alpha l} - 2\alpha \varepsilon l - 2 = 0$$

zu einem Maximum zu machen. Nach bekannten Regeln findet sich für das Maximum:

$$\alpha \varepsilon l = 1,655\,320\,9$$

$$2\alpha l = 2,578\,448\,24$$

$$\eta = 0,023\,029\,1$$

$$\beta = 0,014\,498\,318\,3.$$

Schliesslich berechnete ich die Schwerpunktsgeschwindigkeit noch für die Fälle, dass der Stoss zu Ende ist, wenn die Welle einen Stab erstens sechsmal, zweitens achtmal durchlaufen hat. Im ersteren Falle hat man:

$$(23) \quad \left(\frac{dw}{ds} \right)_{s=0} = (s-\sigma) \{ e^{-6\alpha l} [e^{4\alpha l} (8\alpha^2 l^2 + 4\alpha l + 2) - e^{3\alpha l} (8\alpha l + 2)] + 1 \} - (s-\sigma) = 0$$

oder, $e^{3\alpha l} = x$ gesetzt:

$$-x^3 + 2x^2[(\log x)^2 + \log x + 1] - 2x[2\log x + 1] + 1 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die reellen positiven Wurzeln 1 und 1,83508, von denen die erstere unbrauchbar ist. Für die Schwerpunktschwindigkeit liefert die Formel (20) nach Substitution der betreffenden Functionswerte:

$$v_1 = \frac{a}{l} \int_{-2l}^0 f_3^1(z + 6l) dz,$$

d. i. mit Zuziehung der Gleichung (23):

$$\beta = \frac{1}{2al} \{ 2e^{-2\alpha l} [e^{-2\alpha l} - 4\alpha l - 3] + 4 \}.$$

Die numerische Auswerthung ergibt:

$$\beta = 0,001\ 653\ 73.$$

Tabelle I.

η	αl	$\lambda : l$	β
—	0,162 853	8	0,000 517 9
—	0,303 544	6	0,001 653 7
0,062 216	0,808 067	4	0,008 380 5
0,06	0,826 268	3,958 626	0,008 957 6
0,05	0,911 239	3,786 962	0,011 444 3
0,04	1,019 967	3,606 287	0,013 212 0
0,03	1,159 794	3,421 244	0,014 263 2
0,025	1,248 952	3,323 789	0,014 478 5
0,0232	1,285 594	3,287 460	0,014 498 2
0,023 029	1,289 224	3,283 967	0,014 498 8
0,022 7	1,296 287	3,277 224	0,014 497 7
0,02	1,358 523	3,220 701	0,014 448 3
0,010 697	1,667 652	3	0,013 501 6
0,008	1,811 878	2,921 891	0,012 890 8
0,004	2,156 850	2,776 294	0,011 408 0
0,001	2,848 800	2,588 792	0,008 966 5
0,000 1	3,999 804	2,419 583	0,006 456 7
0,000 01	5,150 989	2,325 829	0,005 019 2
10^{-10}	10,907 4	2,153 872	0,002 370 6
10^{-100}	114,524	2,014 655	0,000 225 8
10^{-1000}	1150,69	2,001 459	0,000 022 5
$10^{-100000}$	1151288	2,000 001	0,000 000 02

Soll die Welle den Stab achtmal durchlaufen, so erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{dw}{ds} \right)_{s=0} = (s-\sigma) \{ e^{-2\alpha l} [1 - 2e^{6\alpha l} \left(\frac{1}{3} \alpha^3 l^3 + 2\alpha l + 1 \right) + 2e^{4\alpha l} (16\alpha^2 l^2 + 4\alpha l + 1) - 2e^{2\alpha l} (6\alpha l + 1)] + 1 \} = 0,$$

welche für αl den Werth 0,162 853 47 liefert; ferner wird:

$$v_1 = \frac{a}{l} \int_{-2l}^0 f_1'(z + 8l) dz, \text{ d. i.}$$

$$\beta = \frac{1}{2\alpha l} \{2e^{-2\alpha l} [e^{-4\alpha l} - 3e^{-2\alpha l} + 5 + 8\alpha^2 l^2 + 8\alpha l - 8\alpha l e^{-2\alpha l}] - 6\},$$

und die numerische Berechnung dieses Ausdrucks ergibt:

$$\beta = 0,000\,517\,889.$$

Es erscheint mir nicht überflüssig, die Annäherungsformel des Hrn Prof. Boltzmann mit meinen Resultaten numerisch zu vergleichen. Dieselbe geht für den hier vorausgesetzten Fall über in:

$$\beta = \frac{4}{45} \frac{c^2 l^2}{b^2}.$$

Dabei ist die Stossdauer $= \pi \sqrt{\frac{m}{2c}}$. Daher ist:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{m}{2c}} = \pi \sqrt{\frac{b}{2cl}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha l}},$$

und obige Formel lässt sich schreiben:

$$\beta = \frac{1}{45} \frac{\pi^4 l^2}{\lambda^4}.$$

Für $\lambda = 6l$ wird:

$$\beta = 0,001\,670\,242, \quad \alpha l = 0,274;$$

für $\lambda = 8l$:

$$\beta = 0,000\,528\,476, \quad \alpha l = 0,154.$$

Vergleicht man diese Werthe mit den entsprechenden der Tab. I, so zeigt sich bereits eine Uebereinstimmung, wie man bei den der Annäherungsformel zu Grunde liegenden Voraussetzungen nur immer erwarten kann.

II. Fall.

$$l_1 = 2l_2 = l; \quad b_1 = b_2 = b.$$

Hier lauten die Gleichungen (6), (7) und (8):

$$g'(-u) = -f'(u - 2l)$$

$$\varphi'(u) = -\gamma'(-u + l)$$

$$\gamma'(-u) = f'(u) + g'(-u) - \varphi'(u)$$

$$f''(u) + \frac{2c}{b} f'(u) = \frac{2c}{b} \varphi'(u) + g''(-u).$$

$$\frac{2c}{b} = \alpha,$$

$$\frac{2c}{b} = \alpha,$$

$$\varphi'(u) = \sigma \quad \text{von } 0 \text{ bis } l$$

$$g'(-u) = -s \quad " 0 " 2l$$

$$\begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \psi(u) &= \sigma \end{aligned}$$

$$g'(-u) = -s$$

$$\psi'(u) = \sigma$$

$$f''(u) = (s - \sigma) e^{-\sigma u} + \sigma = f_1'(u) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{von } 0 \text{ bis } 1 \end{array} \right.$$

$$\gamma'(-u) = f_1'(u) - s - \sigma$$

$$\left. \begin{aligned} g'(-u) &= -s \cdot 0.0 + 1.077019 & 811.100.2 & 2006.1 \\ g'(u) &= -f_1'(u-l) + s + \sigma & 822.210.2 & 2700.9 \\ f'(u) &= (s-\sigma)e^{-\alpha u} \{e^{\alpha l} [-\alpha u + \alpha l - 1] + 1\} + s = f_2'(u) & 100.000.0 & 2012.0 \\ g'(-u) &= f_1'(u) + f_2'(u-l) - 2s - \sigma \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{von } l \\ \text{bis } 2l \end{array}$$

$$\varphi'(u) = -f_1'(u - l) + s + \sigma$$

$$f'(u) = (s - \sigma) e^{-\sigma u} \{ e^{\alpha l} [-\alpha u + \alpha l - 1] + 1 \} + s = f_2'(u) \quad \text{bis } 2l$$

$$\gamma'(-u) = f_2'(u) + f_1'(u-l) - 2s - \sigma$$

$$g'(-u) = -f'(u - 2l) =$$

$$\varphi'(u) = -f_2'(u-l) - f_1'(u-2l) + 2s + \sigma$$

$$f'(u) = (s - \sigma) e^{-\sigma u} \left\{ e^{2\sigma l} \left[\frac{a^2 u^2}{2} - u(2a^2 l + a) + 2a^2 l^2 + 2al \right] + e^{\sigma l} [-au + al - 1] + 1 \right\} + s = f'_3(u)$$

$$+ e^{u^1}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 1 \} + s = f'_3(u)$$

$$\gamma'(-n) = f_3'(n) + f_3'(n-l) - (2s + 1)$$

$$g'(-n) = -f'(n - 2l) \quad \text{and} \quad g'(0) = f'(0)$$

$$q'(u) = -f_3'(u-l) - f_3'(u-2l) + 2s + \sigma$$

$$f(u) = (s - \sigma) e^{-\alpha u} \left\{ e^{3\alpha l} \left[\frac{\alpha^3 u^3}{6} + u^3 \left(\frac{3}{2} \alpha^2 l + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) - u \left(\frac{3}{2} \alpha^3 l^2 + 9 \alpha^2 l - \alpha \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \alpha^3 l^3 + \frac{27}{2} \alpha^2 l^2 - 3 \alpha l + 1 \right] + e^{2\alpha l} \left[\frac{\alpha^2 u^2}{2} - u (2 \alpha^2 l + \alpha) + 2 \alpha^3 l^2 + 2 \alpha l \right] \right. \\ \left. + e^{\alpha l} [-\alpha u + \alpha l - 1] + 1 \right\} + \sigma = f'_4(u)$$

$$f(u) = (s-\sigma)e^{-su} \left\{ e^{3u} \left[-\frac{\alpha^3 u^3}{6} + u^3 \left(\frac{3}{2} \alpha^3 l + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) - u \left(\frac{3}{2} \alpha^3 l^2 + 9 \alpha^2 l - \alpha \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \alpha^3 l^3 + \frac{17}{2} \alpha^3 l^2 - 3 \alpha l + 1 \right] + e^{2u} \left[\frac{\alpha^2 u^3}{2} - u(2 \alpha^2 l + \alpha) + 2 \alpha^3 l^2 + 2 \alpha l \right] \right\} \quad \begin{array}{l} \text{von} \\ \text{31} \\ \text{bis} \\ \text{41} \end{array}$$

$$+ e^{a_1}[-\alpha u + \alpha l - 1] + 1\} + \sigma = f'_4(u)$$

$$\gamma'(-u) = f_4'(u) + f_3'(u-l) - (2s + \sigma).$$

$$0 < \varepsilon \leq 1.$$

1992-1993 21 302 21026 10 007 62115 0 00 12-11-93 12-11-93

$$(94) \quad e^{2\pi i} \left[e^{\pi i} + \frac{\alpha^2 \beta^2 l^2}{2} - \alpha \varepsilon l - 1 \right] - e^{\pi i} [\alpha \varepsilon l + \alpha l + 1] + 1 = 0.$$

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit ergibt sich mit
Rücksicht auf (24):

Rücksicht auf (24): \dots

$$(25) \quad v_1 = \frac{V_1^0 - V_2^0}{2\alpha l} \{e^{-\alpha l} [e^{-\alpha l} - \alpha \varepsilon l] + \alpha \varepsilon l - 1\} + \frac{V_1^0 + V_2^0}{2}.$$

Ich bestimmte unter Annahme verschiedener αl das zugehörige ε aus Gleichung (24) und mit diesen Werthen das v_1 aus Gleichung (25). Die erhaltenen Resultate sind aus Tab. II entnehmen.

Tabelle II.

αl	$\lambda : l$	v_1
0,9036	3,000 000	$0,33491 V_1^0 + 0,66509 V_2^0$
2,8026	2,253 266	$0,35093 V_1^0 + 0,64907 V_2^0$
4,6052	2,051 418	$0,39770 V_1^0 + 0,60230 V_2^0$
6,9078	2,012 853	$0,42824 V_1^0 + 0,57176 V_2^0$
9,2108	2,004 657	$0,46493 V_1^0 + 0,53507 V_2^0$
2302,6	2,000 002	$0,49978 V_1^0 + 0,50022 V_2^0$

III. Fall.

$$l_1 = 2l_2 = l; \quad b_2 = 2b_1.$$

Für diesen Fall ist:

$$\gamma'(-u) = \frac{1}{2} f''(u) + \frac{1}{2} g'(-u) - \varphi'(u),$$

$$f'''(u) + \frac{3c}{2b_1} f'(u) = \frac{2c}{b_1} \varphi'(u) + \frac{c}{2b_1} g'(-u) + g''(-u),$$

alles übrige wie im II. Falle.

Setze ich $(3c/2b_1) = \alpha$, so ergeben sich folgende Functionswerthe:

$$\left. \begin{aligned} g'(-u) &= -s \\ \varphi'(u) &= \sigma \\ f'(u) &= \frac{1}{2}(s - \sigma) e^{-\alpha u} - \frac{1}{2}(s - 4\sigma) = f_1'(u) \\ \gamma'(-u) &= \frac{1}{2} f_1'(u) - \frac{s}{2} - \sigma \end{aligned} \right\} \text{ von } 0 \text{ bis } l$$

$$g(-u) = -s$$

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} f_1'(u - l) + \frac{s}{2} + \sigma$$

$$f''(u) = \frac{1}{2}(s - \sigma) e^{-\alpha u} \{2e^{\alpha l} [-\alpha u + \alpha l - 1] + 3\} + \frac{1}{2}(5s + 4\sigma) = f_2''(u)$$

$$\gamma'(-u) = \frac{1}{2} f_2''(u) + \frac{1}{2} f_1'(u - l) - s - \sigma$$

$$g'(-u) = -f_1'(u - 2l)$$

$$\varphi'(u) = -\frac{1}{2} f_2''(u - l) - \frac{1}{2} f_1'(u - 2l) + s + \sigma$$

$$f''(u) = \frac{1}{2}(s - \sigma) e^{-\alpha u} \{ \frac{1}{2} e^{2\alpha l} [2\alpha^2 u^2 - u(8\alpha^2 l + 14\alpha) + 8\alpha^2 l^2 + 28\alpha l - 5] + 2e^{\alpha l} [-\alpha u + \alpha l - 1] + 3 \} + \frac{1}{2}(35s - 8\sigma) = f_3''(u)$$

$$\gamma'(-u) = \frac{1}{2} f_3''(u) + \frac{1}{2} f_2''(u - l) - s - \sigma.$$

Ich setze wieder $\alpha = \lambda = 2l + \varepsilon l$, wo $0 < \varepsilon \leq 1$, und bilde:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\substack{z=0 \\ u=2l+\varepsilon l}} = f''(\lambda) + g'(-\lambda) = 0.$$

Die sich hieraus ergebende Gleichung:

$$(26) \quad 3e^{-2\varepsilon l} - e^{-\varepsilon l}(2\alpha l + 2\alpha \varepsilon l + 2) + \frac{2}{3}\alpha^2 l^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{3}\alpha \varepsilon l - \frac{1}{3} + \frac{11}{3}e^{\alpha l} = 0,$$

bildet die Bedingung für das Ende des Stosses. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist mit Zuziehung obiger Gleichung:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} v_1 &= \frac{2(V_1^0 - V_2^0)}{27\alpha l} \{ 2e^{-\alpha l} [3e^{-\varepsilon l} - 2\alpha \varepsilon l + 5] + 11\alpha \varepsilon l - 16 \} \\ &\quad + \frac{1}{3}V_1^0 + \frac{1}{3}V_2^0. \end{aligned} \right.$$

Ich berechne wieder unter speciellen Annahmen von α das entsprechende ε aus Gleichung (26) und mit diesen Werthen das v_1 aus (27) und folgende Resultate:

Tabelle III.

αl	$\lambda:l$	v_1
1,07108	3,00000	$0,00355 V_1^0 + 0,99645 V_2^0$
2,3026	2,40029	$0,01107 V_1^0 + 0,98893 V_2^0$
3,91208	2,20675	$0,03468 V_1^0 + 0,96532 V_2^0$
6,9078	2,11020	$0,06420 V_1^0 + 0,93580 V_2^0$
28025	2,00002	$0,11109 V_1^0 + 0,88891 V_2^0$

Fasse ich die Ergebnisse meiner Berechnungen zusammen, so komme ich zu folgendem Schlusse:

Die Abweichungen, welche Hr. Voigt für gleichlange Stäbe zwischen den nach der alten Theorie berechneten und seinen (allerdings nach Anbringung gewisser Correctionen) beobachteten Resultaten findet, sind kleiner als die grössten Abweichungen, welche in meiner Tab. I vorkommen, woraus aber noch kein Schluss gezogen werden darf, ob λ gross oder klein gegenüber $2l$ ist. Meine in der citirten Abhandlung angegebenen Beobachtungen über die Stossdauer von gleichlangen Glasstäben ergeben, wenn man für Glas $\alpha = 5000$ m setzt, $\lambda = 4l$, $8l$ und $12l$ entsprechend den Anfangsamplituden von 100, 50 und 30 mm (Fadenlänge: 2,5 m). Danach müssten

also die Abweichungen von der alten Stosstheorie, welche übrigens kaum die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten dürften, mit wachsender Stosseschwindigkeit zunehmen.

Was den zweiten der hier betrachteten Fälle betrifft, so dürften schon für $\lambda = 3l$ die kaum zu vermeidenden Beobachtungsfehler grösser sein als die Abweichungen des Werthes der Tab. II von $V_1^0/3 + 2V_2^0/3$, welches der Grenzwert für abnehmende α ist. In allen Fällen, wo Hr. Voigt eine die Grenze der Beobachtungsfehler entschieden übersteigende Abweichung vom alten Stossesetze findet, dürfte daher λ noch beträchtlich kleiner als $3l$ sein, ein Umstand, der die Anwendbarkeit von Annäherungsformeln, welche λ/l gross gegen die Einheit voraussetzen, als sehr zweifelhaft erscheinen lässt.

Auch im dritten Falle bestätigt es sich, dass nach der Voigt'schen Hypothese der den gewöhnlichen Stossformeln entsprechende Grenzwert sehr rasch erreicht wird, so zwar, dass schon für $\lambda = 3l$ die Beobachtung kaum mehr eine Abweichung von denselben ergeben könnte.

Obwohl die hier mit Hrn. Voigt gemachte Annahme, dass c eine Constante sei, durch Beobachtungen Voigt's durchaus nicht bestätigt wird, so ist dieselbe doch schon insofern von theoretischem Interesse, als sich mit ihrer Hilfe bei weitem am leichtesten eine continuirliche Brücke zwischen der alten und der St. Venant'schen Theorie herstellen lässt. Und das war der Zweck der obigen Entwicklungen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Boltzmann, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, für die mir hierbei vielfach gewährte Anleitung und Unterstützung meinen wärmsten Dank auszusprechen.

VI. Ueber die Phasenänderungen bei der Reflexion und über die Schwingungsebene des polarisirten Lichtes; von W. Wernicke.

(Hierzu Taf. III Fig. 1-7.)

1.

Die Intensität I des von einer dünnen Schicht eines isotropen durchsichtigen Körpers reflectirten Lichtes ist:

$$(1) \quad I = \frac{(r + \rho)^2 - 4r\rho \sin^2 \frac{\pi}{\lambda_1} (2d \cos \alpha_1 + \Delta - \Delta' + D)}{(1 + r\rho)^2 - 4r\rho \sin^2 \frac{\pi}{\lambda_1} (2d \cos \alpha_1 + \Delta - \Delta' + D)}$$

Es bedeuten darin r die Amplitude des an der oberen Grenzfläche der Schicht reflectirten Lichtes, wenn die des einfallenden gleich Eins ist, ρ die des an der zweiten Grenzfläche reflectirten, d die Dicke der Schicht, λ_1 die Wellenlänge des Lichtes in der Substanz derselben, α_1 den Winkel zwischen dem Lichtstrahl innerhalb und der Normale; Δ , Δ' und D , jedes multiplicirt mit dem Factor $2\pi/\lambda$, die Phasenverzögerungen infolge der Reflexion an der ersten und zweiten und der Brechung in der ersten Grenzfläche.

Der Ausdruck (1) ist streng richtig für isotrope durchsichtige Substanzen; er ist auf allgemein gültige und allgemein angenommene mechanische Grundsätze basirt und unabhängig von jeder besonderen Theorie der Reflexion des Lichtes. Er erhält seine kleinsten Werthe, wenn:

$$(2) \quad (2d \cos \alpha_1 + \Delta - \Delta' + D) \frac{2\pi}{\lambda} = q\pi$$

wird, wo q eine beliebige, von der Dicke der Schicht und der Natur des angewandten Lichtes abhängige ganze Zahl ist; dieselbe ist gerade, wenn der Brechungsindex der Schicht grösser oder kleiner als jeder der beiden Grenzmedien ist, ungerade, wenn er zwischen den beiden letzteren liegt.

Die Hauptaufgabe der Reflexionstheorie, nämlich die Bestimmung der Grössen Δ , Δ' , D durch die optischen Constanten, namentlich den Brechungsindex, für die verschiedenen Lichtarten, konnte bis jetzt nicht ohne Hinzuziehung fremdartiger, aus den Principien der Mechanik

nicht ableitbarer, Annahmen gelöst werden; die Resultate sind daher sehr verschieden, oder, richtiger gesagt, einander widersprechend. Nach Fresnel's und Cauchy's Annahmen und nach Green's Theorie sind alle 3 Grössen für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht Null; nach Neumann's, Mac-Cullagh's u. A. Hypothesen ergibt sich das Gegentheil, nämlich dass A , A' , D nicht für parallel, sondern für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht verschwinden. Auch der dritte noch mögliche Fall hat seine Vertreter gefunden: in der neuesten Zeit haben Einige unter der Voraussetzung des „Mitschwingens der ponderabeln Massentheilen“, Andere durch die Annahme „einer allmählich von einem zum anderen Mittel sich ändernden Aetherdichte“ gefunden, dass beide Lichtarten ihre Phasen ändern, ein Resultat, was freilich den Vorzug der Allgemeinheit vor den anderen voraus zu haben scheint.

Im Folgenden will ich durch neue Versuche zu entscheiden versuchen, welche von den genannten — überhaupt möglichen — Annahmen die allein zulässige ist.

Der einfache Grundgedanke zu diesen Versuchen entwickelt sich folgendermassen:

Aus Gl. (2) ergibt sich:

$$(3) \quad 2d \cos \alpha_1 + A - A' + D = q \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Ist $A - A' + D$ Null, so ergibt (3) für die Dicke der Schicht:

$$(4) \quad 2d = \frac{1}{2} \frac{q \lambda_1}{\cos \alpha_1}.$$

Diese Gleichung ist zufolge der ersten Theorie streng richtig für parallel, nach der zweiten für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht, während sie nach der dritten so wenig richtig ist, dass sich verschiedene Werthe für d bei verschiedenen Einfallswinkeln ergeben müssen. Für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht dagegen liefert die erste Theorie verschiedene Werthe für d für verschiedene Werthe von α_1 , die zweite constante und die dritte ebenfalls voneinander verschiedene. Da sich nun, wie ich sogleich zeigen werde, q , λ_1 und α_1 mit hinreichender Genauigkeit

durch Messungen bestimmen lassen, so kann durch die Versuche entschieden werden, welche von den möglichen drei Hypothesen Gültigkeit hat.

Erst nachdem diese Hauptfrage entschieden ist, können wir an die genauere Prüfung der Formeln gehen, welche uns die den Versuchen entsprechende, allein zulässige Theorie liefert.

2. Apparate und Beobachtungsmethoden.

(Vgl. Fig. 1.)

Durch den Spalt S des Collimators C eines Spectrometers mit horizontalem Kreise K tritt Sonnenlicht ein und fällt auf die in der Mitte des drehbaren Tischchens T vertical aufgestellte Glasplatte P , auf welcher die dünne zu untersuchende Schicht befestigt ist. Dieselbe reflectirt die parallelen Strahlen in das Beobachtungsfernrohr F , welches um die verticale Axe des Instrumentes drehbar und mit den Nonien (oder besser einem dieselbe ersetzenden concentrischen getheilten Kreise) fest verbunden ist. Der abgelesene Winkel, nämlich der Winkel zwischen Collimator- und Fernrohraxe, ist der doppelte Einfallswinkel; derselbe kann auf diese Weise mit jeder gewünschten Genauigkeit, wenn man will, bis auf einzelne Secunden erhalten werden. Ist der Einfallswinkel abgelesen, so wird der Tisch T mit der Platte festgeklemt und vor das Objectiv des Fernrohres auf ein fest mit demselben verbundenes Ansatzstück G mit horizontalem Tischchen das kleine Prismensystem (G) mit gerader Durchsicht gesetzt. Dasselbe zerlegt das durchgehende, von P reflectirte Lichtbündel in ein Spectrum, welches mit den von der Interferenz an der dünnen Schicht herrührenden dunklen Streifen durchzogen ist. Jetzt drehe ich das Fernrohr ein wenig, bis die im Brennpunkt des Objectives angebrachte Spitze auf eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie einsteht, und klemme das Fernrohr fest. Die Spitze ist durch eine Mikrometerschraube M mit getheilter Trommel in der Focalebene verschiebbar; ich drehe die Trommel so lange, bis die Spitze in der Mitte des nächsten Interferenzstreifens steht, und lese die Zahl der Umdrehungen an der Trommel ab; diese Zahl gibt die Lage

des Streifens im Spectrum an; sie ist abhängig von der Natur des Lichtes. Um sie für beide Lichtarten zu erhalten, betrachte ich das Spectrum durch ein dicht hinter dem Ocular angebrachtes Nicol'sches Prisma *N*. Ist die lange Diagonale der Endfläche desselben horizontal, so erhält man die Lage des Streifens für parallel, ist sie vertical, für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die beiden an der Trommel der Mikrometerschraube abgelesenen Zahlen werden notirt und die Spitze auf die zum Ausgangspunkt der Messung dienende Fraunhofer'sche Linie zurückgedreht. Die Messung kann alsdann zur Controle wiederholt werden, wobei zu bemerken ist, dass der Einfallswinkel unabhängig von der Drehung des Fernrohrs ist und so lange derselbe bleibt, als die Stellung des Tisches *T* nicht geändert wird.

Zur Bestimmung der Wellenlängen aus den Ablesungen an der Trommel habe ich aus Angström's Atlas die Wellenlängen einer grösseren Anzahl von Fraunhofer'schen Linien entnommen, diese Linien im Spectrum meines Apparates aufgesucht und ihre Abstände von der nächsten Hauptlinie durch die Zahl der Umdrehungen der Mikrometertrommel bestimmt. Durch graphische Interpolation ergaben sich alsdann die Wellenlängen der Farben zwischen den gemessenen Linien. Fig. 6 stellt die Ausführung und die Resultate dieser Messungen für einen kleinen Prismenkörper mit gerader Durchsicht dar, dessen ich mich am häufigsten bedient habe. Derselbe hat zur Erreichung möglicher Intensität normale Endflächen; die Dispersion wurde durch ein Flüssigkeitsprisma aus mit Alkohol versetztem Zimmtkureäthyläther erzeugt, die Ablenkung durch zwei Flüssigkeitsprismen aus oxydirtem Terpentinöl ($n_D = 1,492$) mit entgegengesetzter brechender Kante aufgehoben; diese Flüssigkeiten waren so gewählt, dass die Empfindlichkeiten derselben sich compensirten und demzufolge bei Temperaturen zwischen 18° und 23° die gegenseitigen Entfernungen der Linien im Spectrum unverändert blieben, wenigstens in weit höherem Maasse, als dies bei einer Prismencombination aus Glas und einer Flüssigkeit der Fall ist.

Für die meisten Versuche habe ich Sonnenlicht benutzt, das von einem Silberspiegel in den Spalt des Collimators reflectirt wurde. Das einfallende Licht war also elliptisch polarisirt, die relative Intensität und Phase der beiden Componenten vom Stande der Sonne und der Stellung des Apparates abhängig; daher für die einzelnen Beobachtungen nicht constant, unter Umständen recht verschieden. Bemerkenswerth ist deshalb, dass die relativen Intensitäten und Phasendifferenzen der beiden Componenten des einfallenden elliptischen Lichtes für die Lage der Interferenzstreifen im Spectrum nach der beschriebenen Methode gleichgültig, für die Deutlichkeit und Schärfe aber nicht ohne Einfluss sind. Wesentlich ist z. B. für die Messung der Interferenzstreifen bei senkrecht zur Einfallsebene polarisirtem Lichte (\diamond Stellung des Ocularnics) — das bei durchsichtigen Körpern von geringem Brechungsvermögen in der Nähe des Polarisationswinkels ohnehin schon sehr schwach ist —, dass die zu benutzende Componente im einfallenden elliptischen Lichte möglichst gross im Vergleich zu anderen gemacht wird.

Nach der beschriebenen Anordnung der Versuche ist das Fernrohr *F* auf den Collimatorspalt, also nicht auf die dünne Schicht in der Mitte des Kreises eingestellt. Will man dasselbe auf die Schicht selbst einstellen und gleichzeitig ein reines Spectrum haben — eine Anordnung, die ich bei der Untersuchung des Kupferoxyduls und der stark brechenden Körper häufig gewählt habe —, so wird das Flüssigkeitsprisma, anstatt mit einer ebenen Glasplatte, mit einer achromatischen Linse von kurzer Brennweite geschlossen und in ihrer Brennebene ein kleiner Spalt ganz nahe der Schicht *P* angebracht. Man erhält so auch bei weit geöffnetem Collimatorspalt *S* zarte Fraunhofer'sche Linien, da die Lichtstrahlen durch zwei Collimatoren sehr parallel geworden sind.

Wenn die Herstellung dünner Lamellen eines Körpers wegen technischer Schwierigkeiten nicht ausführbar ist, so bleibt die beschriebene Untersuchungsmethode doch anwendbar, indem man als dünne Lamelle die Luftschicht zwischen

einer planparallelen Glasplatte (oder der Hypotenusenfläche eines Reflexionsprismas) und einem ebenen Flächenstück des zu untersuchenden Körpers benutzt. Diese Methode, welche in anderer Beziehung der ersteren nachsteht, hat den nicht unerheblichen Vorzug, dass für die Bestimmung der Phasenänderungen die Kenntniss der Brechungsindices nicht notwendig ist. Die Hauptschwierigkeit liegt in der Herstellung ebener spiegelnder und reiner Oberflächen; ich werde später bei Beschreibung der einzelnen Substanzen zeigen, wie ebene und reine Flächen solcher Körper, die gerade für die Prüfung der Theorie von Interesse sind, in vollkommenerer Weise als durch Schleifen und Poliren erhalten werden.

Bei Anwendung der beschriebenen Untersuchungsart braucht das ebene Flächenstück nur von geringer Ausdehnung zu sein, $\frac{1}{4}$ qcm genügt in den meisten Fällen. Legt man, nach Entfernung der Staubtheilchen, eine planparallele Platte aus Glas auf die geschliffene Fläche des zu untersuchenden Körpers, so findet man meist eine Stelle der letzteren, für welche die Luftschicht, mit freiem Auge bei Wolkenlicht betrachtet, breite farbige Streifen (Fig. 2) zeigt, von denen der mittlere horizontale dunkle Streifen die dünnste Stelle der Luftschicht anzeigt. Durch geringen Druck auf die Glasplatte kann man die Luftschicht, ohne ihre Gestalt wesentlich zu ändern, dünner machen. Hat dieselbe nahezu die gewünschte Dicke und Gestalt angenommen, so befestige ich die obere Platte in der erhaltenen Lage mittelst einer nicht leicht erhärtenden weichen Kittmasse auf der unteren. Dies Verfahren hat sich besser als Schraubenbefestigung bewährt, bei welcher zuweilen die Dicke der Schicht auch durch geringe Temperaturänderungen starke Schwankungen erleidet.

Noch leichter als ein Streifensystem von der Gestalt der Fig. 2 erhält man, wenn man in der angegebenen Weise verfährt, ein Ringsystem, wie Fig. 3; selbst Platten von gewöhnlichem gut geschliffenen Spiegelglase liefern nicht selten an ausgesuchten Stellen ein solches. Erscheint der mittlere dünnste Theil der Luftschicht selbst nur in der Ausdehnung von $\frac{1}{4}$ qcm gleichmässig gefärbt, so kann das Präparat unter

Anwendung geeigneter Vorsichtsmaassregeln zu den Messungen verwendet werden.

Hierzu stelle ich zunächst das Plattenpaar auf dem mittleren Tische vertical so auf, dass die Ebene der Luftschicht nahezu durch den auf dem Tische markirten Mittelpunkt geht und die Streifen gleicher Newton'scher Farbe (Fig. 2) horizontal, d. h. senkrecht zum Collimators spalt liegen (parallel gerichtet würden dieselben, wie leicht einzusehen, nicht brauchbare Resultate geben), und lasse mittelst des Collimators ein vom Heliostatenspiegel reflectirtes Bündel paralleler Lichtstrahlen auffallen. Das an der ersten Fläche der vorderen und das von der zweiten der hinteren Platte reflectirte Lichtbündel wird abgeblendet, indem das Bild des farbigen Ringsystems von einem weissen, vor das Prismensystem aufgestellten Papierschirm aufgefangen wird, welcher einen $\frac{1}{2}$ bis 1 mm breiten verticalen Spalt ($a-a$, Fig. 2 u. 3) hat. Den Schirm stellt man so, dass der Spalt den mittleren elliptischen Fleck des Ringsystems (Fig. 3) nahezu halbirt. Hat man ein Streifensystem von der Gestalt der Fig. 2, so kann man mittelst des Spaltes immer dieselbe Stelle der Luftschicht untersuchen. In beiden Fällen erhält man im Fernrohr des Apparates ein Spectrum, das mit gekrümmten Interferenzstreifen (Fig. 4) durchzogen ist, welche ihre Convexität nach dem Violett zu haben. Man stellt die Spitze des Ocularmikrometers stets auf den verticalen, am meisten nach dem Violett zu liegenden Theil des Streifens ein, welcher der dünnsten Stelle der Luftschicht entspricht. — Das beste Kriterium — empfindlicher als die Newton'sche Farbe — dafür, dass die untersuchte Stelle der Schicht an allen Punkten dieselbe Dicke hat, ist das, dass der mittlere Theil der Interferenzstreifen (Fig. 4) immer senkrecht, d. h. parallel den Fraunhofer'schen Linien bleibt, auch wenn man die Schicht um eine horizontale Axe dreht.

3. Spiegelglas.

Das Glas war eine ungefähr 4 mm dicke Platte von gut geschliffenem, in starken Schichten gelblich grün erscheinendem Spiegelglase, das vor 13 Jahren von einer Berliner

Handlung bezogen wurde. An der Kante eines Stückes der Platte wurde eine Fläche angeschliffen, welche mit der einen Fläche ein Prisma bildete, dessen Winkel $56^{\circ} 6' 30''$ betrug. Aus den Minimalablenkungen ergaben sich die Brechungsindices des Glases:

$$\begin{array}{ll} n(B) = 1,5269 & n(E) = 1,5343 \\ n(C) = 1,5280 & n(F) = 1,5373 \\ n(D) = 1,5307 & n(G) = 1,5431 \end{array}$$

Schliff und Politur des Glases standen den Planparallelplatten der optischen Institute wenig nach; die beiden Flächen der mehrere Quadratdecimeter grossen Platte waren schwach wellenförmig und bildeten Winkel zwischen 1 und 3 Minuten. An einer ausgesuchten Stelle wurde ein etwa 2 qcm grosses Stück herausgeschnitten und nach Reinigung der Oberflächen auf dem grösseren Theile der staubfrei gemachten Platte unter schwachem Drucke soweit herumgeführt, bis Farbstreifen von der Gestalt der Fig. 2 erschienen; an dieser Stelle wurde alsdann ein 2 bis 3 qcm grosses Stück herausgeschnitten, mit dem ersteren in der oben beschriebenen Weise vereinigt und die Luftschicht zwischen beiden an der gleichmässig gefärbten dünnsten Stelle untersucht.

Die folgende Tab. I gibt die bei verschiedenen Einfallswinkeln α gemessenen Wellenlängen λ der Interferenzstreifen nebst ihrer Ordnungszahl m und darunter die aus diesen Zahlen nach der Formel:

$$d = \frac{m\lambda}{2 \cos \alpha},$$

d. h. unter der Voraussetzung, dass keine Phasenänderung stattfindet, berechnete Dicke d der Luftschicht an, und zwar für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die Winkel sind bis auf 20 Secunden genau, die Temperatur betrug 20° C. Die Einheit von λ und d ist das Milliontel-millimeter.

Tabelle I.

Luftschicht zwischen zwei Platten des Glases (I) bei \neq Licht. $\alpha = 19^\circ 51'$.

λ (m)	619 (12)	571 (13)	531 (14)	497 (15)	465 (16)	436 (17)
d	3825	3822	3828	3836	3831	3817

 $\alpha = 50^\circ$.

λ (m)	611 (8)	543 (9)	489 (10)	445 (11)
d	3801	3799	3801	3803

 $\alpha = 55^\circ$.

λ (m)	624 (7)	545 (8)	485 (9)	436 (10)
d	3808	3801	3802	3801

 $\alpha = 55^\circ 30'$.

λ (m)	616 (7)	539 (8)	479 (9)	432 (10)
d	3806	3806	3805	3813

 $\alpha = 56^\circ$.

λ (m)	609 (7)	532 (8)	473 (9)	426 (10)
d	3812	3803	3803	3804

 $\alpha = 56^\circ 30'$.

λ (m)	600 (7)	527 (8)	467 (9)	420 (10)
d	3805	3818	3804	3803

 $\alpha = 57^\circ$.

λ (m)	594 (7)	518 (8)	463 (9)	416 (10)
d	3817	3805	3825	3819

 $\alpha = 57^\circ 30'$.

λ (m)	587 (7)	512 (8)	456 (9)	411 (10)
d	3823	3806	3819	3824

 $\alpha = 58^\circ$.

λ (m)	577 (7)	505 (8)	450 (9)	—
d	3811	3812	3821	—

 $\alpha = 59^\circ$.

λ (m)	562 (7)	492 (8)	437 (9)	—
d	3819	3821	3818	—

 $\alpha = 60^\circ$.

λ (m)	545 (7)	477 (8)	424 (9)	—
d	3815	3817	3816	—

Jede der gemessenen Zahlen λ ist das Mittel aus 5 Beobachtungen; für die Dicke d der Luftschicht ergibt die optische Messung in Anbetracht der Mängel des Präparates einen nahezu constanten Werth 3810 mmm; die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; der kleinste Werth ist 3799, der grösste 3836.

Die folgende Tab. II entspricht genau der vorigen Tab. I; sie stellt dieselben Grössen für senkrecht zur Einfall-

ebene polarisirtes Licht dar. Für Einfallswinkel, kleiner als 55° und grösser als 60° findet keine erhebliche Veränderung in der Lage der Streifen statt, wenn man das Ocular-nicol von der \diamond Stellung in die \diamond Stellung dreht.

Tabelle II.

Luftschicht zwischen den Platten des Glases (I) bei \perp Licht.

$\alpha = 55^\circ.$				
$\lambda' (m)$	630 (7)	549 (8)	489 (9)	440 (10)
d'	3844	3830	3836	3835
$\alpha = 55^\circ 30'.$				
$\lambda' (m)$	624 (7)	545 (8)	484 (9)	436 (10)
d'	3873	3849	3846	3849
$\alpha = 56^\circ.$				
$\lambda' (m)$	622 (7)	541 (8)	481 (9)	—
d'	3893	3870	3871	—
$\alpha = 56^\circ 30'.$				
$\lambda' (m)$	—	547 (8)	486 (9)	430 (10)
d'	—	3964	3902	3896
$\alpha = 57^\circ.$				
$\lambda' (m)$	—	564 (8)	499 (9)	—
d'	—	4142	4128	—
$\alpha = 57^\circ 30'.$				
$\lambda' (m)$	—	574 (8)	503 (9)	—
d'	—	4273	4213	—
$\alpha = 58^\circ.$				
$\lambda' (m)$	—	568 (8)	498 (9)	—
d'	—	4267	4229	—
$\alpha = 59^\circ.$				
$\lambda' (m)$	—	557 (8)	488 (9)	—
d'	—	4326	4264	—
$\alpha = 60^\circ.$				
$\lambda' (m)$	—	543 (8)	475 (9)	—
d'	—	4344	4277	—

Die Zahlen d' für die unter der Voraussetzung, dass keine Phasenänderung stattfindet, berechnete Dicke der Luftschicht bieten also für senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht in der 6° umfassenden Umgebung des Polarisationswinkels sehr erhebliche Unterschiede, sowohl untereinander, als von den entsprechenden Zahlen für parallel polarisirtes Licht (Tab. I) dar. Aus beiden Tabellen folgt daher, dass die Phasenänderung ganz vorzugsweise für senkrecht zur

Einfallsebene polarisirtes Licht eintritt, während sie für parallel polarisirtes entweder Null oder sehr gering ist. Um letzteres zu entscheiden, habe ich an einem vollkommeneren Präparate die folgenden Versuche angestellt.

4. Planparalleles Glas (II).

Eine quadratische Planparallelplatte mit sehr ebenen Flächen wurde durchschnitten und beide Theile in der oben beschriebenen Weise aufeinander befestigt. Obwohl die Luftschicht zwischen beiden fast homogen gefärbt erschien, wurde doch nur stets ein und dieselbe Stelle derselben gemessen. Die Tabellen III und IV geben die Resultate für parallel, resp. senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht. Die Temperatur war 20° C., alle Zahlen haben dieselbe Bedeutung wie in Tab. I und II.

Tabelle III.

Luftschicht zwischen planparallelen Glasplatten (II) bei \diamond Licht.

$\alpha = 13^{\circ} 51'$					$\alpha = 56^{\circ}$				
$\lambda(m)$	639 (8)	569 (9)	510 (10)	464 (11)	$\lambda(m)$	587 (5)	490 (6)	420 (7)	—
d	2632	2637	2627	2629	d	2624	2629	2629	—
$\alpha = 30^{\circ}$					$\alpha = 56^{\circ} 30'$				
$\lambda(m)$	569 (8)	504 (9)	455 (10)	—	$\lambda(m)$	579 (5)	483 (6)	—	—
d	2628	2619	2627	—	d	2623	2625	—	—
$\alpha = 50^{\circ}$					$\alpha = 57^{\circ}$				
$\lambda(m)$	565 (6)	483 (7)	—	—	$\lambda(m)$	573 (5)	477 (6)	—	—
d	2636	2630	—	—	d	2630	2626	—	—
$\alpha = 52^{\circ}$					$\alpha = 57^{\circ} 30'$				
$\lambda(m)$	647 (5)	540 (6)	—	—	$\lambda(m)$	565 (5)	470 (6)	—	—
d	3627	2636	—	—	d	2629	2624	—	—
$\alpha = 52^{\circ} 30'$					$\alpha = 58^{\circ}$				
$\lambda(m)$	640 (5)	533 (6)	—	—	$\lambda(m)$	557 (5)	465 (6)	—	—
d	2628	2627	—	—	d	2627	2632	—	—
$\alpha = 55^{\circ}$					$\alpha = 59^{\circ}$				
$\lambda(m)$	604 (5)	502 (6)	432 (7)	—	$\lambda(m)$	540 (5)	450 (6)	—	—
d	2632	2626	2636	—	d	2621	2627	—	—
$\alpha = 55^{\circ} 30'$					$\alpha = 60^{\circ}$				
$\lambda(m)$	594 (5)	496 (6)	427 (7)	—	$\lambda(m)$	525 (5)	438 (6)	—	—
d	2622	2627	2638	—	d	2625	2628	—	—

Tabelle IV.

Luftschicht zwieschen den planparallelen Glasplatten (II) bei 1. Licht.

$\alpha = 52^\circ$			$\alpha = 56^\circ 30'$				
$\lambda' (m)$	\parallel	650,5 (5)	545 (6)	$\lambda' (m)$	\parallel	552 (6)	469 (7)
d'	\parallel	2642	2655	d'	\parallel	3000	2981
$\alpha = 52^\circ 30'$			$\alpha = 57^\circ$				
$\lambda' (m)$	\parallel	645 (5)	538,5 (6)	$\lambda' (m)$	\parallel	553 (6)	466 (7)
d'	\parallel	2651	2654	d'	\parallel	3046	2995
$\alpha = 55^\circ$			$\alpha = 57^\circ 30'$				
$\lambda' (m)$	\parallel	622 (5)	520 (6)	$\lambda' (m)$	\parallel	550 (6)	463 (7)
d'	\parallel	2711	2719	d'	\parallel	3071	3016
$\alpha = 55^\circ 30'$			$\alpha = 58^\circ$				
$\lambda' (m)$	\parallel	629 (5)	530 (6)	$\lambda' (m)$	\parallel	546 (6)	458 (7)
d'	\parallel	2777	2818	d'	\parallel	3079	3025
$\alpha = 55^\circ 40'$			$\alpha = 59^\circ$				
$\lambda' (m)$	\parallel	—	531 (6)	$\lambda' (m)$	\parallel	538 (6)	447 (7)
d'	\parallel	—	2831	d'	\parallel	3105	3041
$\alpha = 55^\circ 45'$			$\alpha = 60^\circ$				
$\lambda' (m)$	\parallel	—	534 (6)	$\lambda' (m)$	\parallel	521 (6)	436 (7)
d'	\parallel	—	2846	d'	\parallel	3126	3052
$\alpha = 56^\circ$							
$\lambda' (m)$	\parallel	539 (6)	468 (7)				
d'	\parallel	2892	2929				

Aus Tab. III geht hervor, dass für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht für die Dicke d der Luftschicht sich stets derselbe Werth ergibt, welchen Werth auch der Einfallswinkel haben möge. Die kleinen Verschiedenheiten der Zahlen d sind unregelmässig und liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.

Dagegen zeigt Tab. IV, dass die Zahlen d' zwischen 52° und 60° die erheblichsten Unterschiede aufweisen. Wir müssen hieraus schliessen, dass nur die Reflection des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes unter Phasenänderung stattfindet, die des parallelen dagegen ohne merkliche Aenderung der Phase vor sich geht.

5. Flussspath.

Zwei ungefähr 4 mm dicke Platten, von Hrn. Mechaniker Hänsch aus ganz wasserhellem Flussspath geschliffen, wurden aufeinander befestigt; die Luftschicht zwischen beiden zeigte

im Apparat keine sehr deutlichen, zur Messung geeigneten Interferenzstreifen, hauptsächlich wohl infolge kleiner Risse im Inneren der anderen Platte. Dieselbe wurde deshalb durch eine Platte des Glases (I) — vom Brechungsindex $n(D) = 1,5307$ — ersetzt; die dünne Luftschicht zeigte jetzt bessere Streifen, deren Lage im Spectrum gut zu bestimmen war. Ich habe die Messungen nur für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht ausgeführt, und zwar für drei verschiedene (mit I, II, III bezeichnete) Dicken der Luftschicht. Die folgende Tab. V gibt die beim Einfallswinkel α gemessenen Wellenlängen λ nebst der zugehörigen Ordnungszahl m und die aus der Formel $2d = \lambda \cos \alpha / (m)$ berechnete doppelte Dicke der Luftschicht an.

Tabelle V.

Luftschicht zwischen Glas- und Flussspathplatte bei \perp Licht.

α	13° 51'	30°	50°	55°	58°	60°	Temp.
I $\lambda(m)$	547 (3)	489 (3)	544 (2)	483 (2)	453 (2)	426 (2)	24° C.
$2d$	1691	1694	1692	1685	1709	1704	
II $\lambda(m)$	586 (3)	520 (3)	577 (2)	517 (2)	—	454 (2)	20° C.
$2d$	1811	1802	1796	1803	—	1816	
III $\lambda(m)$	523 (4)	621 (3)	461 (3)	619 (2)	572 (2)	536 (2)	21° C.
$2d$	2157	2151	2152	2158	2159	2146	
		467 (4)					

Die Zahlen der vorigen 4 Tabellen haben gezeigt, dass parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht ohne Phasenänderung am Glase reflectirt wird; eine jede der drei Reihen in Tab. V beweist, dass die Zurückwerfung dieses Lichtes auch am Flussspath ohne Aenderung der Phase stattfindet. Wurde das Ocularnicol aus der \diamond - in die \diamond Stellung gedreht, so rückten bei Einfallswinkeln zwischen 54 und 57° die Interferenzstreifen nach dem violetten Ende des Spectrums (anstatt wie beim Glase nach dem rothen), ein Beweis, dass unsere Flussspathplatte, wie wohl die meisten Varietäten dieses Minerals, negative Reflexion hatten.

6. Jodsilber.

Die dünnen Schichten wurden durch schnelles Jodiren polirter Silberspiegel auf Glas bei Ausschluss wirksamen Lichtes hergestellt. Wenn die letzten Spuren von freiem Jod aus der gebildeten Jodsilberschicht entfernt sind, ist dies Jodsilber nicht mehr lichtempfindlich. Am leichtesten lassen sich homogene Schichten erzeugen, deren Dicke kleiner als zwei Wellenlängen ist; die Herstellung dickerer ist schwieriger, beliebig dicker, wofern sie homogen und von ebenen Flächen begrenzt sein sollen, bei gewöhnlicher Temperatur nicht möglich. Der Grund hiervon ist der, dass die zuerst gebildeten äusseren Schichten der Lamelle, welche von den Dämpfen des Jods durchdrungen werden, durch die später in grösserer Tiefe entstehenden gehoben und schliesslich infolge der geringen Cohäsion, die das AgJ bei gewöhnlicher Temperatur hat, theilweise zertrümmert werden: durch ein gutes Mikroskop lassen sich die Hochebenen, Thäler und Klüfte sehr gut erkennen; dem unbewaffneten Auge erscheinen sie trübe.

Die folgenden Versuche beziehen sich auf zwei Jodsilberschichten, von denen die eine möglichst dick, die andere, soweit dies in Rücksicht auf die Genauigkeit der Messungen zulässig ist, möglichst dünn war. Die erstere, mit Jodsilber (I) bezeichnet, zeigte nach der prismatischen Zerlegung des reflectirten Lichtes fünf dunkle Interferenzstreifen, deren Ordnungszahlen 6, 7, 8, 9, 10 sind; die dünnere, mit (II) bezeichnet, von smaragdgrüner Farbe bei kleineren Einfallswinkeln, nur die Streifen von der Ordnung 3, 4, 5.

Bestimmt wurden für die Schicht (I) die Lagen zweier Streifen, nämlich der beiden (6) und (7); für die Schicht II nur der erste (3).

In den folgenden Tabellen bedeuten wie früher λ die beim Einfallswinkel α für \neq und \perp zur Einfallsebene polarisirtes Licht gemessenen Wellenlängen, d die aus der Formel $2d = m\lambda/(n \cos \alpha_1)$ berechneten Dicken; in dieser ist m die Ordnungszahl, n der zu λ gehörige Brechungsindex des Jodsilbers, α_1 der mit dem Einfallswinkel α durch die Glei-

chung $\sin \alpha_1 = n \sin \alpha$ zusammenhängende Brechungswinkel. Die Brechungsindices des Jodsilbers sind der früher¹⁾ von mir mitgetheilten Tafel entnommen.

Tabelle VI_a.

Jodsilber (I), zwischen Glas und Luft, im reflectirten Licht.
Streifen $m = 6$.

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d \perp$
13° 51'	618	618	1726	1726
30°	605	605	1719	1719
50°	586	584	1722	1715
60°	577	569	1717	1693
68°	574	563	1721	1679
64°	573	559	1720	1667
65°	572	554	1718	1656
66°	570,5	550	1715	1634
67°	569	547	1714	1629
68°	569	544,5	1715	1623
70°	567	541	1713	1613

Tabelle VI_b.

Jodsilber (I), zwischen Glas und Luft, im reflectirten Licht.
Streifen $m = 7$.

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d \perp$
13° 51'	540,5	540,5	1715	1715
30°	534	534	1725	1725
50°	520	518	1730	1723
60°	513	508	1731	1705
68°	511	503,5	1730	1692
64°	510	500	1728	1678
65°	508	497	1723	1667
66°	508	494	1721	1656
67°	508	493	1721	1653
68°	507	491	1722	1646
70°	507	489	1723	1640

Tabelle VII.

Jodsilber (II), zwischen Glas und Luft, im reflectirten Licht.
Streifen $m = 3$.

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d \perp$
13° 51'	602	602	836	836
30°	590	590	834	834
50°	575	575	840	840
60°	565,5	555	840	818
63°	562	544	838	804
64°	560	538	836	794
65°	560	531	838	784
66°	558	525	836	771
67°	558	519,5	838	763
68°	556	514	836	754
70°	554,5	509	835	744

Obwohl das Jodsilber das Licht sehr stark bricht — seine Brechungsindices liegen zwischen 2,1 und 2,5, so ist doch in den vorigen 3 Tabellen eine Phasenänderung für parallel zur Einfallsebene polarisirtes Licht nirgends erkennbar; in jeder sind die Zahlen unter ($2d \parallel$) nahezu constant für die verschiedenen Einfallswinkel; ihre geringen Verschie-

1) W. Wernicke, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1876. p. 137.

denheiten lassen nichts Gesetzmässiges erkennen und sind ohne Zweifel Folgen von Ungenauigkeiten in der Messung der nicht sehr scharfen Streifen.

7. Kupferoxydul.

Durch electrolytische Zersetzung alkalischer Kupferlösungen kann man, wie ich früher¹⁾ gezeigt habe, auf Metallplatten homogene Schichten von Kupferoxydul in beliebiger Dicke erhalten. Von allen Methoden der Herstellung dünner Schichten dürfte diese die vollkommenste sein; denn da man durch Einschaltung eines Galvanometers, eines Rheostaten und hinreichend grosser Widerstände die Stromstärke in der Gewalt hat, so kann man die den Körper bildenden Kräfte vom ersten bis zum letzten Augenblicke constant halten, ist also sicher, dass die Oberfläche der Schicht keine andere Beschaffenheit hat als das Innere. Eine Oberflächenspannung z. B., wie sie bei geschmolzenen und erstarrten Körpern eintreten kann, ist hier ganz ausgeschlossen.

Obwohl die Brechungsexponenten des Kupferoxyduls zwischen 2,6 und 2,9 liegen, und die Absorption nicht ganz unbedeutend ist — Schichten von $\frac{1}{10}$ mm Dicke lassen nur noch rothes, von $\frac{2}{10}$ mm kaum noch etwas hindurch —, so findet doch eine bemerkbare Phasenänderung des unter kleinen Einfallswinkeln (nahe Null) reflectirten Lichtes nicht statt. Um dies zu beweisen, brachte ich auf die zu untersuchende Schicht ein Tröpfchen einer Lösung von Kautschuk in Schwefelkohlenstoff, legte auf dieses ein rechteckiges, 5 mm langes und 2 mm breites planparalleles Deckglas und stellte die Platte vor den Spalt des Spectrometers mit der früher²⁾ beschriebenen Einrichtung. Die beiden an der Grenze von Cu_2O -Luft und von Cu_2O -Kautschuk-Schwefelkohlenstoff reflectirten Lichtbündel bilden nach der prismatischen Zerlegung zwei übereinander liegende, durch eine scharfe Linie getrennte, Streifensysteme; nicht die geringste gegenseitige Verschiebung der Streifen war bemerkbar. Dasselbe Resultat erhielt ich, als ich statt der stark brechenden Kautschuk-

1) W. Wernicke, Pogg. Ann. 139. p. 132. 1870.

2) W. Wernicke, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1875. p. 673.

Lösung Wasser, Alkohol, Schellacklösung nach einander anwandte. Diese Versuche beweisen, dass die Phase des an der Grenze von Kupferoxydul und einer der genannten 4 Substanzen reflectirten Lichtes bei kleinen Einfallswinkeln dieselbe ist wie an der Grenze von Cu_2O und Luft. — Bei einigen anderen Substanzen jedoch, z. B. aufgeschmolzenem Colophonium, erwärmtem Canadabalsam, nicht ganz reiner, namentlich Lackmus röthender Gelatine, zeigte sich eine Verschiebung der Interferenzstreifen gegen das violette Ende des Spectrums hin, gleich als ob die von diesen Substanzen bedeckte Cu_2O -Schicht ein wenig dünner geworden wäre. Dies letztere ist auch wirklich der Fall; denn durch Digestion mit Cu_2O färben sich jene Substanzen deutlich grün oder bei alkalischer Reaction braun — ein Zeichen, dass Auflösung eingetreten ist.

Um die Untersuchungen der Phasenänderungen des unter beliebigen Einfallswinkeln reflectirten Lichtes möglichst einfach zu gestalten, ist es nothwendig, die dünne Schicht vom Metall zu trennen. Die Trennung ist mir durch folgendes Verfahren gelungen. Ich giesse auf die der horizontal gelegten Metallplatte fest anhaftende Schicht eine frisch bereitete Lösung reiner Gelatine (russischer Hausenblase), sodass dieselbe die Platte gleichmässig bedeckt, und lasse das Lösungsmittel schnell bei gewöhnlicher Temperatur, am besten im Vacuum, verdunsten. Bald kann man die feste Gelatineschicht, nachdem man mit einem scharfen Messer oder durch Biegen der Platte an einer Stelle einen Sprung erzeugt hat, ganz oder grösstentheils vom Metall ablösen. Hierdurch gewinnt man eine Kupferoxydulschicht, welche auf der einen Seite von Luft, auf der anderen von einer dünnen Gelatineschicht begrenzt ist, welche also im durchgehenden wie im reflectirten Lichte, unabhängig von der Metallreflexion, optisch untersucht werden kann. Diese Methode ist allgemein anwendbar auf metallische und nicht metallische Körper; sie ermöglicht überdies — was für die Bestimmung der Reflexionsconstanten von Bedeutung ist —, die Reflexion an derselben Stelle eines Spiegels in Berührung mit Glas und dann in Berührung mit Luft zu messen.

Die Brechungsindices des Cu_2O habe ich ganz ähnlich wie die der dünnen Jodsilberschichten¹⁾ durch Messung der Lage der Interferenzminima verschieden dicker Lamellen und graphische Interpolation bestimmt. Tab. VIII gibt die Brechungsindices von der Wellenlänge $\lambda = 686$ bis $\lambda = 486$ an, wie sie der die Dispersionscurve des Kupferoxyduls darstellenden Curve in Tafel IV entnommen sind; in dieser bedeuten die Abscissen die Wellenlängen, die Ordinaten die Brechungsindices. Wenngleich der absolute Werth des Brechungsindex wahrscheinlich schon in der dritten Decimale ungenau ist, so habe ich doch die Zahlen auf 4 Stellen angegeben, weil nämlich die Berechnung der Phasenänderungen nicht sowohl vom absoluten Werthe, als vielmehr von den Quotienten zweier nicht weit auseinander liegender Brechungsexponenten abhängt.

Tabelle VIII.

Brechungsindices des Kupferoxyduls zwischen $\lambda = 686$ und 486 .

λ	n	λ	n	λ	n	λ	n
686	2,6640	636	2,6818	586	2,7089	536	2,7637
684	2,6645	634	2,6826	584	2,7105	534	2,7670
682	2,6651	632	2,6835	582	2,7120	532	2,7705
680	2,6657	630	2,6846	580	2,7135	530	2,7742
678	2,6663	628	2,6854	578	2,7152	528	2,7780
676	2,6670	626	2,6862	576	2,7170	526	2,7821
674	2,6676	624	2,6870	574	2,7188	524	2,7860
672	2,6683	622	2,6879	572	2,7205	522	2,7900
670	2,6689	620	2,6888	570	2,7224	520	2,7950
668	2,6696	618	2,6898	568	2,7243	518	2,7999
666	2,6703	616	2,6908	566	2,7263	516	2,8048
664	2,6710	614	2,6919	564	2,7285	514	2,8101
662	2,6717	612	2,6929	562	2,7305	512	2,8162
660	2,6725	610	2,6940	560	2,7326	510	2,8227
658	2,6732	608	2,6950	558	2,7348	508	2,8290
656	2,6739	606	2,6960	556	2,7371	506	2,8352
654	2,6746	604	2,6971	554	2,7395	504	2,8422
652	2,6754	602	2,6982	552	2,7418	502	2,8498
650	2,6761	600	2,6994	550	2,7442	500	2,8579
648	2,6770	598	2,7006	548	2,7467	498	2,8660
646	2,6778	596	2,7019	546	2,7492	496	2,8725
644	2,6786	594	2,7032	544	2,7518	494	2,8818
642	2,6794	592	2,7045	542	2,7547	492	2,8900
640	2,6802	590	2,7060	540	2,7575	490	2,9050
638	2,6810	588	2,7074	538	2,7605	488	2,9170

1) W. Wernicke, Monatsber. der Berl. Acad. 1876. p. 137.

8. Aeußere Reflexion an Cu_2O .

Mit Hilfe der vorigen Tabelle sind die doppelten Dicken $2d$ der Kupferoxydulschichten für die verschiedenen Einfallswinkel α aus der Gleichung $2d = m\lambda/n \cos \alpha_1$ berechnet, nachdem die Wellenlängen für parallel ($\lambda \parallel$) und senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht ($\lambda \perp$) gemessen waren. Die Lamellen wurden hierzu mittelst Canadabalsam mit der Gelatine-seite auf Glas gekittet und in der Mitte des Tisches des Spectrometers senkrecht zur Ebene der Collimator- und Fernrohraxe aufgestellt. Eine etwa 20 qmm grosse Lamelle, im Folgenden mit Cu_2O (I) bezeichnet, zeigte zwei bei allen Einfallswinkeln zwischen 17° und 75° deutliche, zur Messung geeignete, Interferenzminima; Tab. IX stellt die Resultate für den weniger brechbaren Streifen ($m=5$), Tab. X für den folgenden ($m=6$) dar.

Tabelle IX.

Cu_2O (I) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte.

$m = 5.$

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d' \perp$
35° 18'	636	636	1215	1215
45 18	628,5	628,5	1214	1214
50 18	625	624	1216	1213
55 18	619,5	613	1209	1195
60 18	615	607	1207	1189
65 18	611	599	1205	1177
67 48	610	591	1208	1165
69 18	610	585	1207	1152
70 18	610	583	1209	1147
71 18	611	581	1212	1143
72 18	609	578	1211	1137
73 18	608	575	1208	1128
75 18	607	571	1206	1122

Tabelle X.

Cu_2O (I) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte.

$m = 6.$

α	$\lambda \parallel$	$\lambda \perp$	$2d \parallel$	$2d' \perp$
35° 18'	544	544	1213	1213
45 18	538,5	538,5	1211	1211
50 18	536	535	1212	1208
55 18	533	530	1209	1198
60 18	529	523	1203	1185
65 18	528	520	1206	1181
67 48	527	515	1201	1165
69 18	526	513	1202	1158
70 18	525	512	1201	1150
71 18	524	510	1199	1143
72 18	524	508	1201	1137
73 18	524	507	1202	1134
75 18	523	505	1201	1128

Tab. XI und XII, genau wie die beiden vorigen eingerichtet, geben die entsprechenden Zahlen für zwei Interferenzminima $m=8$ und $m=9$ für eine andere, mit (II) bezeichnete Cu_2O -Lamelle.

Tabelle XI.

Cu₂O (II) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte. $m = 8.$

α	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d' \perp$
17° 11'	660	660	2012	2010
25 18	658	658	2013	2013
35 18	655	655	2007	2007
45 18	650	650	2016	2016
50 18	647	646	2018	2015
55 18	643	640	2017	2006
60 18	639	634	2016	1998
65 18	635	626	2013	1981
67 48	633	620	2012	1967
69 18	632	616	2010	1952
70 18	631	612	2009	1938
71 18	629	610	2007	1931
72 18	628	608	2005	1925
73 18	628	605	2004	1916
75 18	626	602	2001	1907

Tabelle XII.

Cu₂O (II) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Lichte. $m = 9.$

α	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d' \perp$
17° 11'	594	594	2006	2006
25 18	591	591	2008	2006
35 18	587	587	1998	1998
45 18	583	583	2006	2006
50 18	581	580	2011	2009
55 18	579	577	2015	2005
60 18	576	573	2015	2001
65 18	574	567	2016	1987
67 48	573	564	2014	1977
69 18	572	561	2010	1965
70 18	571	559	2011	1959
71 18	571	557	2010	1932
72 18	571	555	2009	1944
73 18	570	553	2008	1939
75 18	568	551	2007	1933

9. Innere Reflexion an Kupferoxydul.

Die Untersuchung der inneren Reflexion lässt sich bei Körpern von selbst nur mässigem Absorptionsvermögen nur durch die Methode der dünnen Schichten bewerkstelligen; jede andere versagt hier gänzlich.

Die planparallele Gelatinelamelle L , welche die Cu₂O-Schicht trägt, wurde mittelst Canadabalsam mit der Gelatineseite auf der Hypotenusenfläche eines rechtwinklig gleichschenkligen Crownglasprismas (Fig. 5) vorsichtig so befestigt, dass die neue Hypotenusenfläche von Cu₂O parallel der Hypotenusenfläche des Glases wurde. Ist 2β der Winkel zwischen dem durch die eine Kathetenfläche eintretenden und dem aus der anderen austretenden Strahle, also der am Kreise des Spectrometers gemessene Winkel, r der Winkel zwischen dem Strahle innerhalb des Glases und der Normale der Kathetenfläche, μ der Brechungsindex des Prismas für ein bestimmtes λ , so ist:

$$\sin r = \frac{\sin(\beta - 45^\circ)}{\mu}$$

und wie leicht (Fig. 5) zu sehen, der Winkel zwischen dem Strahl im Prisma und der Normale der Kupferoxydulschicht, d. h. der Einfallswinkel von Glas in Kupferoxydul:

$$\alpha = 45^\circ + r.$$

Ist $\beta < 45^\circ$, so ist r negativ.

Die Brechungsexponenten des Crownsglases, des Canadabalsams und der Gelatine sind durch das Minimum der Ablenkung für verschiedene Linien bestimmt und in Tab. XIII aufgeführt.

Tabelle XIII.

	Brechungsindices					
	B	C	D	E	F	G
Glasprisma	1,5125	1,5134	1,5159	1,5191	1,5222	1,5278
Canadabalsam	—	—	1,5259	—	—	1,5420
Gelatine	1,5295 (A)	—	1,5354	—	1,5440	1,5521

Von den bei der inneren Reflexion in Betracht kommenden Winkeln ist besonders der Austrittswinkel J , d. h. der Winkel zwischen der Normale der Kupferoxydulschicht und dem austretenden Strahle bemerkenswerth, weil er dem Einfallswinkel bei der äusseren Reflexion entspricht; er hängt mit dem Winkel α durch die Gleichung $\sin J = \mu \sin \alpha$ zusammen, weil die Gelatineschicht von parallelen Ebenen begrenzt wird.

Die folgenden 4 Tabellen enthalten in der ersten Columne die am Kreise gemessenen Winkel β , in der zweiten die aus diesen berechneten Austrittswinkel J , in der dritten und vierten die am Ocularmikrometer für beide Lichtarten gemessenen Wellenlängen λ_{\parallel} und λ_{\perp} und in den beiden letzten die daraus berechneten Dicken d der Schicht. — In der zweiten Columne beziehen sich die oberen Zahlen für die Winkel J auf das parallel, die unteren auf das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht; die Unterschiede rühren von der Dispersion des Glasprismas her.

Tab. XIV und XV geben die Zahlen für zwei Interferenzminima $m = 5$ und $m = 6$ einer Cu_2O -Schicht (III), Tab. XVI und XVII für die Streifen $m = 8$, $m = 9$ einer anderen mit (IV) bezeichneten an.

Tabelle XIV.

Cu₂O (III) zwischen Gelatine und Luft (innere Reflexion).

m = 5.

β	J	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
17° 11'	43° 32' 32"	628	628	1210	1210
25 18	53 30' 40"	619	617	1206	1200
27 48	57 19' 18"	616	612	1205	1196
29 18	59 37' 37"	614	609	1203	1193
30 18	61 14' 15"	613	607	1206	1192
31 18	62 56' 57"	612	604	1203	1187
32 18	64 44' 40"	610	601	1201	1180
33 18	66 39' 48"	610	595	1205	1171
34 18	68 44' 57"	608	592	1202	1160
35 18	71 0' 7"	607	582	1204	1145
35 48	72 13' 21"	607	581	1206	1138
36 18	73 32' 43"	607	577	1207	1130
37 18	76 33' 48"	607	572	1208	1125
38 18	80 18' 40"	607	569	1209	1118

Tabelle XV.

Cu₂O (III) zwischen Gelatine und Luft (innere Reflexion).

m = 6.

β	J	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
17° 11'	43° 46'	537	537	1205	1205
25 18	54 0	532	530	1208	1199
27 48	57 39	529	527	1201	1193
29 18	59 58	528	525	1201	1186
30 18	61 36' 37"	528	524	1203	1180
31 18	63 21' 22"	527	522	1202	1165
32 18	65 11' 13"	527	521	1204	1164
33 18	67 8' 11"	526	518	1200	1175
34 18	69 19' 19"	526	515	1204	1167
35 18	71 33' 42"	526	512	1206	1156
35 48	72 49' 2'	526	511	1207	1151
36 18	74 10' 36"	525	508	1205	1141
37 18	77 17' 36"	523	503	1202	1130
38 18	81 26' 51"	522	501	1198	1120

Tabelle XVI.

Cu₂O (IV) zwischen Gelatine und Luft (innere Reflexion).

m = 8.

β	J	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
17° 11'	43° 30'	649	649	2007	2007
25 18	53 38	642	641	2010	2004
27 48	57 14	640	637	2012	2001
30 18	61 10	639	638	2018	1997
32 48	65 38' 39"	637	628	2015	1990
34 18	68 39' 40"	635	622	2019	1974
35 18	70 55' 57"	632	614	2014	1948
35 48	72 11' 8"	630	609	2011	1933
36 18	73 26' 30"	629	607	2007	1928
36 48	74 52' 55"	629	605*	2004	*una.
37 18	76 29' 10"	627	601	2004	1917
38 18	80 18' 18"	625	598	2001	1905

Tabelle XVII.

Cu₂O (IV) zwischen Gelatine und Luft (innere Reflexion).

m = 9.

β	J	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
17° 11'	43° 38'	583	583	2003	2003
25 18	53 48	578	576	2007	2000
27 48	57 25	577	574	2011	2001
30 18	61 22	576	571	2015	1996
32 48	65 51' 52"	575	568	2017	1982
34 18	68 45' 58"	574	564,5	2021	1962
35 18	71 12' 17"	572	559	2018	1960
35 48	72 27' 33"	571	557	2015	1954
36 18	73 39' 57"	570	554	2013	1946
37 48	75 9' 33"	569	554*	2009*	*una.
37 18	76 46' 1'	568	550	2006	1938
38 18	80 44' 58"	567	544	2008	1930

In jeder der vorangehenden 4 Tabellen sind die Zahlen unter $2d \neq$ nahezu constant, für alle Austrittswinkel J bis zu 81° ; die unter $2d \perp$ haben die verschiedensten Werthe. Die Unterschiede von $d \neq$ und $d \perp$ würden die Phasenunterschiede beider Lichtarten darstellen, wenn für alle äusseren Einfallswinkel J bis zu 81° bei der Reflexion an der Grenze von Cu_2O und Gelatine keine merkliche Differenz der Phasen des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes stattfände. Einem Winkel J von 81° entspricht ein Einfallswinkel α von Glas in Cu_2O von $40^\circ 30'$; jedenfalls dürfte also für eine Kupferoxydulschicht, welche beiderseitig von Gelatine begrenzt ist, die Lage der Interferenzstreifen im Spectrum eine Verschiedenheit für beide Lichtarten nicht zeigen, wenn der Einfallswinkel kleiner als $40^\circ 30'$ ist. Um dies zu prüfen, habe ich auf die an der Hypotenusenfläche des gleichschenkligen Crownglasprismas befestigte Schicht ein gleiches Prisma mit Canadabalsam aufgesetzt, sodass die Kupferoxydulschicht sich zwischen Gelatine und Canadabalsam befand, welcher bis auf die letzte Decimalstelle mit denen der Gelatine übereinstimmende Brechungsindices hatte.

Die Resultate der Messungen an zwei Interferenzstreifen $m = 4$ und $m = 5$ einer mit (V) bezeichneten Kupferoxydulschicht sind in den folgenden Tabellen XVIII und XIX zusammengestellt.

Tabelle XVIII.

Cu_2O (V) zwischen Gelatine und Canadabalsam. $m = 4$.

β	α	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
$17^\circ 12'$	$27^\circ 2'$	685	685	1063	1063
$25 18$	$32 7$	874	874	1060	1060
$35 18$	$30 35$	660	660	1056	1056
$45 18$	$45 10$	649	649	1059	1059
$50 18$	$48 28$	644	642	1061	1054
$55 18$	$51 46$	637	630	1062	1047
$60 18$	$55 2$	630	605	1059	1010
$62 48$	$56 39$	628	590	1061	987
$65 18$	$58 13$	625	567	1060	952
$67 18$	$59 50$	620	551	1056	914
$70 18$	$61 20$	616	540	1053	894
$73 18$	$64 34$	610	527	1052	871

Tabelle XIX.

Cu_2O (V) zwischen Gelatine und Canadabalsam. $m = 5$.

β	α	$\lambda \neq$	$\lambda \perp$	$2d \neq$	$2d \perp$
$17^\circ 12'$	$27^\circ 3'$	562	562	1060	1060
$25 18$	$32 8$	553	553	1055	1055
$35 18$	$38 35$	543	543	1049	1049
$45 18$	$45 10$	534	534	1047	1047
$50 18$	$48 28$	530	527	1046	1038
$55 18$	$51 56$	526	520	1045	1032
$60 18$	$55 1$	523	511	1047	1010
$62 48$	$56 38$	521	505	1046	986
$65 18$	$58 12$	520	496	1048	961
$67 48$	$59 49$	518	486	1046	934
$70 18$	$61 18$	516	478	1044	915
$75 18$	$64 22$	514	474	1047	906

Die Zahlen der ersten 4 Reihen in jeder der beiden vorangehenden Tabellen zeigen, dass für Einfallswinkel α , kleiner als $45^\circ 10'$, keine merkliche Phasendifferenz bei der Reflexion an der Grenze von Cu_2O und Gelatine stattfindet. Die Unterschiede in den Grössen $2d \neq$ und $2d \perp$ der früheren 4 Tabellen XIV bis XVII rühren also von der Reflexion an der Luftgrenze her.

Alle Tabellen aber zeigen, dass auch für Kupferoxydul das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht ohne Phasenänderung reflectirt wird, die Reflexion mag an der Grenze von Luft oder Gelatine oder Canadabalsam stattfinden, eine innere oder äussere sein.

10. Bleisesquihydroxyd.

In Pogg. Ann. 139. p. 132. 1870 u. 141. p. 109. 1871 habe ich die Reindarstellung und Zusammensetzung einer Gruppe von Körpern beschrieben, welche vorzugsweise für die experimentelle Prüfung der Theorie der Lichtreflection geeignet erscheinen, nämlich die Superhydroxyde des Bleies, Mangans, Kobalts u. s. w. Durch electrolytische Zersetzung bestimmter Lösungen jener Metalle lassen sich homogene Schichten dieser Körper auf Metallplatten erhalten; nach den im Vorigen beschriebenen Methoden können dieselben ohne Schwierigkeit von der Metallplatte getrennt und im durchgehenden Lichte untersucht werden. Die Lichtabsorption ist in allen grösser als im Kupferoxydul, besonders im brechbareren Theile des Spectrums; die Interferenzstreifen, welche man nach der prismatischen Zerlegung des reflectirten Lichtes im Spectrum beobachtet, sind deswegen im Grün nur schwach, im Blau nicht mehr zu erkennen; aus diesem Grunde lassen sich die Brechungsindices für Grün und Blau nicht genau bestimmen.

Ich habe in den oben genannten Arbeiten ferner gezeigt, dass der electrolytische Wasserstoff in die Metalle Platin, Kupfer, Nickel, Neusilber eindringt, und wie man die Menge desselben dadurch bestimmen kann, dass man die Metallplatten in bestimmte Metallaufösungen bringt, welche auf die wasserstofffreien Platten nicht die geringste Wirkung

anüben, dieselben aber alsbald mit den Newton'schen Farben überziehen, wenn sie mit Wasserstoff bedeckt sind.

Der electrolytische Wasserstoff dringt nicht nur in jene Metalle, sondern auch in andere Substanzen ein und bringt in diesen chemische Wirkungen hervor. Lässt man denselben auf das Superhydroxyd dadurch einwirken, dass man den Strom eines Daniells, mit dessen Zinkcylinder die auf Platin niedergeschlagene Superhydroxydschicht, und dessen Kupfercylinder eine kleine Platin- oder Bleiplatte verbunden ist, durch reines Wasser schickt — oder einen noch schwächeren Strom durch natronhaltiges Wasser —, so wird das schwarze Superhydroxyd bald röthlich gelb, indem der electrolytische Wasserstoff sich mit einem Theile des Sauerstoffs im Superoxyd verbindet und eine neue Bleiverbindung bildet, welche ich Bleisesequihydroxyd nenne. Demselben durch längere Einwirkung oder Verstärkung des Stromes mehr Sauerstoff zu entziehen, ist schwierig, weil es dann sofort metallisches Blei gibt; nur durch besondere Vorsichtsmaassregeln gelingt die weitere Reduction; man erhält dann stets weisses Bleioxydhydrat, niemals wasserfreies gelbes Oxyd.

Diese einfache Methode der Herstellung lässt sich noch weiter vereinfachen:

1. Ist das Bleisuperhydroxyd auf Platin niedergeschlagen, so taucht man die Platinplatte in Wasser und stellt ein Zinkstäbchen hinein, welches das Metall an irgend einer Stelle berührt. In einigen Stunden ist das schwarze Superhydroxyd vollständig in gelbes Sesequihydroxyd verwandelt.

2. Hat man eine Superhydroxydschicht auf Neusilber, so verwandelt sich dieselbe unter Wasser scheinbar von selbst, in Wirklichkeit durch die zwischen Neusilber, Superoxyd und Wasser gebildete Kette, in Sesequihydroxyd.

3. Bei einiger Vorsicht kann man daher (siehe 2) dünne Schichten von reinem Sesequihydroxyd auf Gelatineplatten einfach dadurch erhalten, dass man die Gelatinelösung auf die auf Neusilber (Nickel) niedergeschlagene Schicht des Superhydroxyds giesst, trocknen lässt und, wie vordem beschrieben, abzieht.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, aus dem Bleisuperhydroxyd jene Verbindung zu erhalten, welche stets von constanter Zusammensetzung und überdies beständig ist, so dass man selbst die dünnsten Schichten, welche die Farben erster Ordnung zeigen, Jahre lang unverändert aufbewahren kann. Sie unterscheidet sich vom Superhydroxyd in ihrer Zusammensetzung dadurch, dass sie eine geringe Menge Sauerstoff weniger enthält, in optischer Beziehung aber hauptsächlich durch den für unseren nächsten Zweck günstigen Umstand, dass sie die brechbareren Strahlen in erheblich geringerem Maasse absorbirt. Die Absorptionscurven beider Körper steigen vom Roth zum Violett allmählich und stetig an, die des Superhydroxyds schon ziemlich stark von *E*, die des Sesquihydroxyds erst von *G* im Violett.

Die Dispersionscurve des Bleisesquihydroxyds konnte wegen seines geringen Absorptionsvermögens wie die des Silberjodids und Kupferoxyduls ermittelt werden. Als Ausgangspunkt diente der Brechungsindex 1,9614 für die Wellenlänge 589, den ich durch Wägungen homogener Schichten des Superhydroxyds nach der früher beschriebenen Methode für das letztere erhalten hatte. Durch Vergleichung der Interferenzspectra gleich dicker Schichten mit scharfer Trennungslinie zeigt sich, dass die Brechungsexponenten des Sesquihydroxyds für Roth und Gelb nur wenig kleiner als die entsprechenden des Superhydroxyds sind; als wahrscheinlichster Werth für $n(D)$ des Sesquihydroxyds ergab sich 1,9492. Aus dieser Zahl bestimmte ich die Brechungsindices für die anderen Wellenlängen durch Messung der Interferenzstreifen einer grösseren Anzahl verschieden dicker Schichten und Construction der Dispersionscurve I Fig. 7.

Obwohl die letzten Decimalstellen der Zahl 1,9492 unsicher sind, so habe ich doch alle Brechungsindices auf 4 Stellen angegeben, weil die Genauigkeit der Curve dies zulässt und für die Berechnung der Phasenänderungen die Quotienten zweier naheliegender Zahlen mehr von Einfluss sind als die absoluten Werthe derselben.

In Tab. XX sind die Brechungsindices des Bleisesquihydroxyds zwischen $\lambda = 666$ und $\lambda = 476$ zusammengestellt;

die zwischen je zwei in dieser Tabelle aufgeführten Zahlen liegenden können der Curve II in Fig. 7 entnommen werden.

Tabelle XX.

Brechungsindices des Bleisesquihydroxyds.

λ	n	λ	n
666	1,9134	566	1,9632
656	1,9172	556	1,9708
646	1,9212	546	1,9777
636	1,9254	536	1,9853
626	1,9299	526	1,9933
616	1,9347	516	2,0017
606	1,9398	506	2,0106
596	1,9452	496	2,0200
586	1,9509	486	2,0298
576	1,9569	476	2,0402

Bemerkenswerth ist, dass, obwohl der Körper an Metall ebenso reich ist als Kupferoxydul, und obwohl sein spezifisches Gewicht nicht kleiner ist, dennoch Brechung und Dispersion der Bleiverbindung so sehr viel geringer sind, während die Stärke und der Gang der Absorption des Lichtes im ganzen sichtbaren Spectrum wenig Verschiedenheiten darbieten.

11. Aeussere Reflexion am Bleisesquihydroxyd.

Die folgenden Tabellen sind genau wie die entsprechenden für das Kupferoxydul eingerichtet; alles was dort über die Bedeutung, Messung und Berechnung der aufgeführten Zahlen gesagt ist, gilt auch hier. Tab. XXI und XXII stellen die Resultate für die beiden Interferenzstreifen $m = 4$ und $m = 5$ einer mit (I) bezeichneten Schicht, Tab. XXIII für den Streifen $m = 4$ einer anderen, mit (II) bezeichneten Schicht von Bleisesquihydroxyd dar.

Tabelle XXI.

Bleisesquihydroxyd (I) zwischen Luft
und Gelatine im reflectirten Licht. $m = 4.$

α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 11'	690	690	1459	1459
25 18	678	678	1460	1460
30 18	671	671	1463	1463
35 18	665,5	665,5	1458	1458
40 18	660	660	1461	1461
45 18	653	653	1463	1463
50 18	647	645	1465	1457
55 18	640	636	1469	1456
57 48	636	631	1469	1449
60 18	632	621	1467	1437
62 18	629,5	604	1466	1396
62 48	627	599	1462	1382
63 3	626	598	1461	1375
64 18	624	586	1466	1355
65 18	623	580	1461	1333

Tabelle XXII.

Bleisesquihydroxyd (I) zwischen Luft
und Gelatine im reflectirten Licht. $m = 5.$

α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 11'	569,5	569,5	1461	1461
25 18	562	562	1465	1465
30 18	558	558	1462	1462
35 18	554	554	1460	1460
40 18	550	550	1464	1464
45 18	546	546	1467	1467
50 18	541	539	1464	1457
55 18	535	533	1468	1457
57 48	532	527	1466	1447
60 18	529	521	1464	1436
62 18	527	511	1460	1407
62 48	526	507	1461	1397
63 3	526	504	1463	1391
64 18	525	496	1460	1367
65 18	523	492	1458	1359

Tabelle XXIII.

Bleisesquihydroxyd (II) zwischen Luft und Gelatine im reflectirten Licht.

 $m = 4.$

α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 11'	603	603	1256	1256
25 18	595	595	1260	1260
35 18	588	588	1259	1259
45 18	579	578	1269	1265
50 18	574	571	1267	1259
55 18	569	564	1269	1256
57 48	565	559	1266	1249
60 18	562	551	1265	1234
62 18	560	541	1263	1209
62 48	559	537	1264	1199
63 18	558	535	1266	1194
63 48	558	532	1267	1190
64 18	558	528	1269	1179
65 18	556	524	1268	1171

12. Innere Reflexion an Bleisesquihydroxyd.

In Bezug auf Anordnung und Ausführung der Versuche, Bedeutung und Berechnung der in den folgenden Tabellen aufgeführten Zahlen gilt das, was unter 9 bei der inneren Reflexion am Kupferoxydul gesagt ist. Tab. XXIV stellt die Resultate der Messungen eines Interferenzstreifens $m = 4$

für eine mit (III) bezeichnete Schicht, Tab. XXV für den Streifen $m = 3$ einer mit (IV) bezeichneten, zwischen Gelatine und Canadabalsam befindlichen Schicht dar. In Bezug auf letztere gilt besonders das bei der Erklärung der Tab. XVIII Gesagte.

Tabelle XXIV.

Bleisesquihydroxyd (III) zwischen
Gelatine und Luft.

$m = 4.$

β	J	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 11'	43° 38'	582	582	1269	1269
25 18	53 48	573	571	1276	1268
27 48	57 26	567	560	1272	1256
29 18	59 44	565	553	1274	1245
30 18	61 24	563	544	1273	1229
30 48	62 13	562	536	1272	1214
31 18	63 6	562	533	1275	1207
32 18	64 54	560	528	1274	1195
32 48	65 45	558	523	1270	1178
35 18	71 16	554	513	1271	1163
36 18	73 53	553	509	1273	1150

Tabelle XXV.

Bleisesquihydroxyd (IV) zwischen Gela-
tine und Canadabalsam im reflectirten
Licht.

$m = 3.$

β	α	$\lambda \mp$	$\lambda \perp$	$2d \mp$	$2d \perp$
17° 12'	27° 2'	665	665	1113	1113
25 18	32 7	648	648	1112	1112
30 18	35 20	636	636	1111	1111
35 18	38 35	625	623	1113	1109
40 18	41 42	614	610	1114	1108
45 18	45 10	605	600	1121	1109
50 18	48 28	595	587	1125	1106
52 48	50 2	589	578	1124	1095
55 18	51 46	584	561	1126	1067
57 48	53 23	578	550	1125	1051
58 18	53 43	575	545	1119	1041
59 18	54 20	574	535	1120	1020
60 18	55 1	572	523	1121	994
65 18	58 13	563	509	1128	975
70 18	61 22	555*	498	1138*	969

*ung.

*ung.

Die ersten 4 Horizontalreihen der Tab. XXV zeigen, dass für Einfallswinkel α , kleiner als 38° , das Licht an der Grenze von Bleisesquihydroxyd und Gelatine ohne merklichen Phasenunterschied des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes reflectirt wird. Die Differenzen der Zahlen $2d \mp$ und $2d \perp$ in den Tabellen XXI bis XXIV rühren also nur von den Phasenunterschieden des an der Luftgrenze reflectirten Lichtes her, da zu einem Einfallswinkel $\alpha = 38^\circ$ von Glas (vom Brechungsindex 1,52) in Sesquihydroxyd ein Einfallswinkel J (aus Luft in denselben Körper) von $69^\circ 21'$ gehört.

Resultate.

Aus den in den vorangehenden 12 Capiteln beschriebenen Versuchen, welche isotrope Körper von den verschiedensten Brechungsexponenten — von 1,4 (Flusspath) bis 2,9

(Kupferoxydul) — umfassen, ergibt sich eine Anzahl von Folgerungen, von denen ich zunächst die folgenden hervorhebe:

1. Isotrope Körper von geringem Absorptionsvermögen reflectiren das parallel zur Einfallsebene polarisirte Licht unter allen Einfallswinkeln ohne merkliche Aenderung der Phase, die Reflexion mag eine äussere oder innere sein.

2. Die Phase des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes wird allein geändert.

3. Alle Theorien des Lichtes, welche den Sätzen 1 und 2 nicht entsprechen, sind unhaltbar.

Berlin, im Mai 1883.

VII. *Ueber die electriche Leitungsfähigkeit der Mischungen von Wasser und Alkohol;* *von Emanuel Pfeiffer.*

(Aus dem phys. Laboratorium der technischen Hochschule zu München.)

(Hierzu Taf. III Fig. 8—10.)

Eine seit mehreren Monaten in Gang befindliche Experimentaluntersuchung, bei der ich mich mit der Ermittlung der electriche Leitungsfähigkeiten von sehr schlecht leitenden Electrolyten zu befassen habe, veranlasste mich zur Construction eines Widerstandsgefässes von möglichst kleiner Widerstandscapacität. Der Grund hierzu liegt in dem Umstande, dass ich mich bei den Widerstandsmessungen der bekannten Kohlrausch'schen Messmethode mit alternierenden Strömen bediente, bei der in der Brücke ein Electrodynamometer eingeschaltet ist. Da sich letzteres bekanntlich an Empfindlichkeit mit den Galvanometern nicht messen kann, so tritt bei Messung grösserer Widerstände der Uebelstand ein, dass dieselbe nicht mehr mit der nöthigen Schärfe ausgeführt werden kann. Die folglich wünschenswerthe Verkleinerung der zu ermittelnden Widerstände erreicht man durch Vergrösserung der Capacität des Widerstandsgefässes. Das von mir benutzte Widerstandsgefäss war in folgen-

der Weise construirt (Fig. 8): Ich nahm 2 Glasröhren von ca. 3 und 3,6 cm äusserer Weite. Das engere Rohr wurde auf eine Länge von 13 cm auf der Aussenseite mit einem Platinblech umhüllt und letzteres durch 3 Platindrähte so fest auf die Röhre gebunden, dass eine Verschiebung oder Durchbiegung des Bleches nicht mehr möglich war. Das weitere Rohr wurde im Inneren ebenfalls auf eine Länge von 13 cm mit einem Platinblech ausgekleidet. Um auch bei ihm eine etwaige Deformation oder Verschiebung unmöglich zu machen, wurde der Durchmesser des Platincylinders dem inneren Durchmesser der Glasröhre so genau als möglich gleich gemacht und dann die zusammenstossenden Seitenkanten des Bleches in der Mitte und an beiden Enden mit Silber gelöthet. Sodann wurden die beiden Glasröhren so ineinander gesteckt, dass die äussere Platinbelegung P_1 der inneren Röhre R_1 und die innere Belegung P der äusseren Röhre R einander genau als concentrische Cylinderflächen gegenüber standen. Die weitere Fertigstellung des Gefässes verdanke ich der Geschicklichkeit des hiesigen Glasbläfers, Hrn. Greiner. Die Röhre R_1 wurde oben geschlossen und unten mit der Röhre R zusammengeschmolzen und eine hier nach unten angesetzte kurze Glasröhre in den schweren Messingfuss F eingekittet, um dem so über 30 cm hohen, schlanken Widerstandsgefäss die nöthige Stabilität zu verschaffen. Die Glasröhre R wurde oben zu einem engeren Hals zusammengezogen und in diesen ein hohler Glasstöpsel G eingeschliffen. Eine kleine Glasglocke H wurde in der aus der Figur ersichtlichen Weise über das geschlossene Gefäss gestülpt, um Staub und andere Verunreinigungen fernzuhalten, die bekanntlich bei manchen schlechtleitenden Electrolyten sehr störend wirken. Die Stromzuleitung geschah durch die eingeschmolzenen Platindrähte D und D_1 , welche oberhalb der Einschmelzstelle durch ein Gummiband B straff an die Röhre gedrückt wurden, um erstere zu schützen.

Ich gehe über zur Bestimmung der Widerstandscapacität des eben beschriebenen Gefässes. Unter den von Kohlrausch¹⁾ empfohlenen, zur Aichung von Gefässen besonders

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 49. 1879.

geeigneten Electrolyten wäre wohl Essigsäure wegen ihres grossen specifischen Leitungswiderstandes am vortheilhaftesten gewesen. Weil ich aber dieselbe nicht in der wünschenswerthen Reinheit besass, so wählte ich als Normallösungen Zinkvitriollösung vom specifischen Gewicht 1,285 und Bittersalzlösung vom specifischen Gewicht 1,187.¹⁾ Mit diesen liess sich aber die Capacität obigen Gefässes nicht direct bestimmen, da in diesem die Widerstände zu gering gewesen wären, um sich genau ermitteln zu lassen. Der Widerstand der Normalzinkvitriollösung wäre z. B. in meinem Gefäss bei 18° ca. 0,07 Q.-E.

Ich musste auf einem Umwege zum Ziele zu kommen suchen; dies geschah in folgender Weise: Es wurden zwei von Kohlrausch²⁾ angegebene Widerstandsgefässe von grösserer und kleinerer Capacität in Anwendung gebracht. Die beiden Normallösungen wurden zunächst im ersten Gefäss untersucht; die Capacität desselben ergab sich:

bei Zinkvitriollösung $k = 0,001\ 114$,

bei Bittersalzlösung $= 0,001\ 106$,

also im Mittel $= 0,001\ 110$.

Ich bemerke hierbei nebenher, dass ich vom Zinkvitriol zwei verschiedene Lösungen herstellte. Einmal wurde käuflicher, chemisch reiner Zinkvitriol einigemal umkrystallisirt und dann sofort zur Lösung verwendet, das andere mal wurde er nach den Vorschriften von v. Beetz mit Zinkcarbonat gekocht und ebenfalls umkrystallisirt. Im letzteren Fall erhielt ich für das grosse Gefäss die obige Capacität:

0,001 114,

im ersteren die Capacität: 0,001 110.

Der Unterschied zwischen beiden ist also fast unmerklich, was für die Reinheit der von mir angewandten Substanzen spricht. Der obige Mittelwerth für die Capacität des grossen Gefässes wurde nun dazu verwandt, um die Leitungsfähigkeit einer nicht ganz reinen Essigsäure zu ermitteln; dieselbe war bei 16°:

$$\lambda_{16} = 0,000\ 000\ 155\ 2$$

1) l. c. p. 49.

2) l. c. Taf. I. Fig. 2 und 3.

und bei einem späteren Versuche:

$$\lambda_{10} = 0,000\,000\,155\,5.$$

Mit Hülfe dieser nun bekannten Leitungsfähigkeit der Essigsäurelösung wurde die Capacität des zweiten, kleineren Gefässes bestimmt und ergab:

$$k_1 = 0,000\,016\,03.$$

In diesem Gefäss liess sich nun ein noch schlechter leitender Electrolyt, eine ganz verdünnte Kochsalzlösung untersuchen von der Leitungsfähigkeit:

$$\lambda_{10} = 87,71 \times 10^{-10}.$$

Diese Lösung nun wurde zur Ermittlung der Capacität meines Gefässes angewandt, für das ich bei zwei verschiedenen Versuchen fand:

$$k_2 \cdot 10^{10} = 3305 \text{ und } = 3302, \text{ im Mittel } = 3303.$$

Diese Capacität wurde ein für alle mal mit 10^{10} multiplicirt und sind also auch alle in Zukunft anzuführenden Leitungsfähigkeiten in diesem Verhältniss vergrössert.

Bevor ich zur Angabe der von mir erlangten Resultate gehe, muss ich noch einige Bemerkungen vorausschicken. Die Widerstandsbestimmungen wurden, wie ich bereits eingangs erwähnte, nach der Kohlrausch'schen Methode durchgeführt. Ich hatte ebenso wie bei einer früher in diesen Berichten¹⁾ erschienenen Abhandlung einen Sinus-inductor²⁾ und ein Dynamometer³⁾, beide von Kohlrausch construirt, in Verwendung. Die Widerstände wurden wie dort mit einer grossen Siemens'schen Brücke bestimmt.

Da ich vielfach mit reinem Wasser zu thun hatte, so wurden die Bleche meines Widerstandsgefässes nicht platinirt, da die Platinirung die Reinhaltung der Electroden erschwert, umso mehr, als bei der beträchtlichen Grösse meiner Electroden die Möglichkeit der Unmerkbarmachung der Polarisation auch ohne dieses Hilfsmittel vorauszusehen war. Inwieweit dies eintraf, illustrire ich am besten durch die nachfolgende kleine Tabelle, in der in der ersten Reihe

1) Pfeiffer, Sitzungsber. d. k. b. Akad. d. Wiss. 2. p. 293. 1884.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 292. 1874.

3) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 556. 1882.

verschiedene Tourenzahlen des Inductors, in der zweiten die mit denselben gefundenen Widerstände einer Mischung von Alkohol und Wasser, mit einem Alkoholgehalt von ca. 88 Gewichtsprocenten bei genau constanter Temperatur aufgeführt werden:

Tabelle I.

Tourenzahl pro Sec.	Widerstand in Q.-E.
90	1164,0
103	1163,5
110	1163,4

Bei einer Tourenzahl über 100 sind also die Widerstände von derselben unabhängig, welche Zahl bei meinen Versuchen immer beträchtlich überschritten war.

Bei der bekannten starken Beeinflussung der Leitungsfähigkeit des Wassers durch minimale Verunreinigungen, die sich auch bei den Mischungen von Wasser und Alkohol zeigte, musste ich Vorkehrungen treffen, die mir Gewissheit gaben, dass sich während der einige Wochen dauernden Versuche die Leitungsfähigkeiten der Bestandtheile, aus denen die Mischungen bereitet wurden, nicht merklich geändert habe. Dies geschah, indem Wasser und Alkohol in Gefässen verwendet wurden, in denen sie seit Jahren nur im reinsten Zustand aufbewahrt worden waren. Ich hatte mich durch lange Versuchsreihen überzeugt, dass durch die Aufbewahrung an sich, sowie durch die Manipulationen des Umgießens u. s. w. die Leitungsfähigkeiten nicht alterirt wurden.

Bei Durchsicht der Litteratur fand ich nur einzelne auf mein Thema bezügliche Angaben.

Zunächst erwähne ich eine Stelle einer Abhandlung Herwig's¹⁾, in der er gelegentlich die Leitungsfähigkeit von Wasser, Alkohol und zwei Gemischen aus beiden untersucht, aber zu grosse Zahlen erhält.

Said Effendi²⁾ schätzte sehr approximativ das Verhältniss der Leitungsfähigkeit des Alkohols zu der des Wassers und fand für dasselbe den Werth 0,0049.

1) Herwig, Pogg. Ann. 159. p. 65. 1876.

2) Said Effendi, Compt. rend. 68. p. 1565. 1869.

Nach einer anderen Methode findet Oberbeck¹⁾ für dieses Verhältniss die Zahl 0,14.

Kohlrausch hat nun in seiner Arbeit „über die elektrische Leitungsfähigkeit des Wassers und einiger anderer schlechter Leiter“²⁾ einiges Licht in diese widersprechenden Angaben gebracht. Er fand für absoluten Alkohol die Leitungsfähigkeiten 0,3 bis 0,5, für käuflichen absoluten Alkohol 1,8 bis 2,0, was mit den von mir erhaltenen Zahlen, wie aus den späteren Tabellen ersichtlich, gut übereinstimmt. Weiter fand er, dass das Leitungsvermögen von Wasser durch geringen Alkoholzusatz sich von 5,2 auf 5,6 erhöhte, sprach jedoch die Möglichkeit aus, dass die Erhöhung auch von Neben Umständen herrühren könne. In der That stimmt die Beobachtung qualitativ mit den meinigen überein.

Wenn ich nun zur Darstellung meiner Resultate übergehe, so muss ich zunächst auf die Herstellung und Bestimmung der Mischungen eingehen. Unter Procentgehalt ist in Zukunft immer der Gehalt in Gewichtsprocenten verstanden. Der Gehalt der Lösungen an Alkohol wurde aus dem specifischen Gewicht derselben mit Hülfe der Tabellen von Mendelejeff³⁾ bestimmt. Die Ermittlung der specifischen Gewichte geschah mittelst eines Pyknometers. Die obenerwähnten Tabellen enthalten das specifische Gewicht der Lösungen bei 15° bezogen auf Wasser von 15° als Einheit. Auf obige Temperatur musste ich meine Wägungen beziehen. Da letztere immer bei nahe 15° ausgeführt wurden, so genügte mir eine annähernde Kenntniss der cubischen Ausdehnung der Lösungen zur Bestimmung der kleinen Correctionsgrösse. Sie wurde ebenfalls aus den Landolt'schen Tabellen⁴⁾ entnommen, indem aus den Zahlen Recknagel's eine Curve über den Verlauf des Ausdehnungscoëfficienten in seiner Abhängigkeit vom Procentgehalt construirt wurde.

Die in den nachfolgenden Tabellen enthaltenen Zahlen für die Leitungsfähigkeit sind aus zwei getrennten Versuchs-

1) Oberbeck, Pogg. Ann. 155. p. 601. 1875.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergzbd. 8. p. 12. 1876.

3) Landolt u. Börnstein, phys. chem. Tab. p. 151.

4) l. c. p. 63.

reihen combinirt; indem einmal von Wasser zu höheren Gehalten aufwärts, das andere mal vom absoluten Alkohol zu geringeren Gehalten vorgeschritten wurde. Unter absolutem Alkohol verstehe ich den Alkohol, wie wir ihn als völlig rein aus der chemischen Fabrik von Perutz dahier beziehen. Eine specifische Gewichtsbestimmung ergab den Gehalt desselben an Alkohol in Gewichtsprocenten zu 99,28 Proc. Die Leitungsfähigkeit bei 15° war ca. 2,4, während Kohlrausch wohl auch bei Zimmertemperatur 1,8 bis 2,0 findet. Wie ein Blick auf die später zu beschreibenden Figuren zeigt, fällt die Curve der Leitungsfähigkeit mit abnehmendem Wassergehalt schnell ab, und ist also die Differenz durch einen geringen Unterschied der beiden Alkohole im Wassergehalt leicht zu erklären. Da ferner Kohlrausch die Leitungsfähigkeit des wasserfreien Alkohols zu 0,3 bis 0,5 fand, so konnte ich auf die weitere Verfolgung der ganz concentrirten Lösungen verzichten und nehme obigen 99,28 procent. Alkohol als Ausgangspunkt für die verdünnten Lösungen.

Tabelle II.

A	p	λ	t	λ_1	t_1
1	0	1,355	0,66	1,975	13,62
0,99605	2,14	1,376	0,46	2,077	14,54
0,99082	5,24	1,400	0,64	2,195	14,40
0,98598	8,50	1,385	0,74	2,174	14,15
0,97895	13,96	1,332	0,78	1,991	11,46
0,96833	22,60	1,190	0,80	2,175	15,84
0,96302	26,52	1,160	0,59	1,940	12,84
0,95582	31,19	1,152	0,63	2,232	16,36
0,92873	45,38	1,256	0,72	2,045	12,61
0,91320	52,40	1,373	0,91	2,410	15,80
0,89102	62,20	1,515	0,53	2,542	15,43
0,89078	62,31	1,579	0,80	2,556	14,82
0,87308	69,85	1,727	0,85	2,724	15,46
0,86526	73,12	1,763	0,67	2,792	15,85
0,85572	77,09	1,938	0,93	2,591	11,13
0,84039	83,37	2,039	0,72	2,920	16,12
0,82345	87,59	2,004	0,73	2,760	14,64
0,81831	91,78	1,965	0,84	2,662	14,74
0,80660	95,94	1,966	1,20	2,574	14,82
0,79656	99,28	1,897	1,03	2,419	15,22

In vorstehender Tabelle II sind die direct erhaltenen Beobachtungsergebnisse zusammengestellt. Die Columnen A

enthält die specifischen Gewichte der Lösungen bei 15° bezogen auf Wasser von 15°, die Columnne p die Gewichtsprocente, die Columnne λ die Leitungsfähigkeiten bei der niedrigeren Temperatur t , die λ_1 dasselbe bei der höheren Temperatur t_1 .

Für die meisten obigen Lösungen hatte ich auch noch die Leitungsfähigkeiten für zwei oder drei Zwischentemperaturen bestimmt, und es wurde dabei constatirt, dass die Leitungsfähigkeit nicht genau dem Temperaturzuwachs proportional ist.

Durch folgende Gleichungen wurde dann die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von der Temperatur ermittelt.

$$\lambda_t = \lambda_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$$

$$\lambda_{t_1} = \lambda_0 (1 + \alpha t_1 + \beta t_1^2).$$

Hier sind 0 , t und t_1 die Temperaturen der Lösungen, λ_0 , λ_t und λ_{t_1} die zugehörigen Leitungsfähigkeiten. Hieraus wurden jedesmal die Coëfficienten α und β ermittelt. Weitere beobachtete Leitungsvermögen stimmten mit den hieraus berechneten meist sehr gut überein, wie folgendes Beispiel zeigen möge.

Für den Procentgehalt 91,78 Proc. fand sich:

$$t = 7,53 \quad \lambda_t = 2,300$$

$$t_1 = 14,74 \quad \lambda_{t_1} = 2,662.$$

In der Nähe von 0° war gefunden $\lambda_{0,84} = 1,965$ und hieraus durch lineare Interpolation mit λ_t :

$\lambda_0 = 1,925$; daraus ergab sich $\alpha = 0,02380$, $\beta = 0,000149$.

Eine weitere Leitungsfähigkeit ergab sich direct als:

$$\lambda_{10,94} = 2,462, \text{ berechnet} = 2,461.$$

Ich habe die Zahlen für die Mitteltemperaturen und die Werthe von α und β nicht angegeben, sondern später die Temperaturcoëfficienten nur mit Hülfe der zwei äussersten angegebenen Temperaturen linear berechnet. Der Coëfficient β zeigt wohl wegen seiner Kleinheit und der daraus entspringenden Ungenauigkeit so starke Schwankungen, dass keine Gesetzmässigkeit zu erkennen war. Nur soviel will ich erwähnen: Derselbe ist für mein reines Wasser negativ, geht dann bei ganz schwachem Alkoholgehalt durch 0 hindurch und ist für alle beobachteten Lösungen positiv.

Während also die Leitungsfähigkeit meines reinen Wassers langsamer, als der Proportionalität mit der Temperaturzunahme entspräche, anwächst, findet bei sämtlichen alkoholischen Lösungen ein beschleunigtes Wachsthum statt.

Aus obiger Tabelle wurden nun die Leitungsfähigkeiten für genau 0 und 15° berechnet. Dies geschah, wenn die beobachteten Temperaturen nicht zu weit von 0 und 15° ablagen, durch lineare Interpolation, bei grösseren Intervallen wurden die Coëfficienten α und β zur Berechnung herangezogen. In der Tab. III, in welcher die Columnne p wieder die Procentgehalte bezeichnet, sind die Ergebnisse zusammengestellt. Die Columnne $\Delta\lambda$ enthält die mittlere Zunahme des Leitungsvermögens pro Grad innerhalb der beobachteten Grenzen. In der Columnne α ist der Temperaturcoëfficient enthalten, wie er aus den 2 Grenztemperaturen t und 0° durch die Gleichung folgt:

$$\lambda_t = \lambda_0 (1 + \alpha_0 t).$$

α_0 ist also die mittlere Zunahme der Leitungsfähigkeit pro Grad zwischen 0 und 15° dividirt durch λ_0 .

Tabelle III.

p	λ_0	λ_{15}	$\Delta\lambda$	α_0
0	1,323	2,025	0,0478	0,0361
2,14	1,352	2,100	0,0499	0,0369
5,24	1,363	2,230	0,0577	0,0423
8,50	1,341	2,224	0,0588	0,0438
13,96	1,284	2,209	0,0617	0,0481
22,60	1,138	2,120	0,0655	0,0576
26,52	1,122	2,078	0,0638	0,0569
31,19	1,109	2,129	0,0680	0,0613
45,38	1,208	2,224	0,0664	0,0550
52,49	1,309	2,368	0,0706	0,0539
62,20	1,478	2,512	0,0689	0,0466
62,31	1,523	2,568	0,0697	0,0475
69,85	1,669	2,692	0,0682	0,0409
73,12	1,718	2,784	0,0678	0,0395
77,09	1,879	2,839	0,0640	0,0341
83,37	1,998	2,856	0,0572	0,0286
87,59	1,964	2,779	0,0543	0,0276
91,78	1,923	2,675	0,0501	0,0261
95,94	1,914	2,582	0,0446	0,0233
99,28	1,859	2,411	0,0368	0,0198

In Fig. 9 sind auf Grund dieser Tabelle 2 Curven construirt, die die Leitungsfähigkeiten λ_0 und λ_{15} als Function des Alkoholgehaltes der Lösung darstellen. Dieselben haben den gleichen eigenthümlichen Verlauf, dass sie zwei Maxima und ein Minimum besitzen. In Fig. 10 ist ebenso die Abhängigkeit des Temperaturcoefficienten α_0 vom Alkoholgehalt graphisch dargestellt. Letztere Curve zeigt im Gegensatz zu den beiden ersten eine grosse Einfachheit, indem sie in der Nähe von 30 Proc. ein Maximum hat, das mit dem Minimum der beiden Curven für die Leitungsfähigkeit zusammenzufallen scheint. — Dieselbe Coincidenz des Minimums der Leitungsfähigkeit mit dem Maximum des Temperaturcoefficienten fand auch Kohlrausch¹⁾ für Schwefelsäure.

Zum Zwecke der weiteren Discussion der vorliegenden Thatsachen möchte ich vorausschicken, dass in neuerer Zeit bekanntlich vielfach die electriche Leitungsfähigkeit mit der Reibung in Beziehung gebracht worden ist, welche bei der durch den Strom hervorgebrachten gegenseitigen Verschiebung der Theile des Electrolyten auftritt. Von G. Wiedemann²⁾ wurde zuerst eine derartige Beziehung aufgestellt. Für einige wässrige Salzlösungen fand er innerhalb gewisser Grenzen die Beziehung bestätigt, dass die Leitungsfähigkeit dem Salzgehalt der Lösung p direct und dem Reibungcoefficienten η verkehrt proportional ist. Später hat sich insbesondere Grottrian³⁾ mit dem Zusammenhang zwischen Leitungsfähigkeit und Reibungcoefficienten befasst und namentlich die Analogie zwischen dem Verlauf der Temperaturcoefficienten beider Grössen gezeigt. Kohlrausch⁴⁾ wies auf die Wichtigkeit der verdünnten Lösungen hin, bei denen sich die mechanischen Vorgänge am einfachsten und übersichtlichsten gestalten. Schliesslich möchte ich noch der Arbeit von C. Stephan⁵⁾ Erwähnung thun, der eine Reihe

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. bair. Acad. d. Wiss. 1875. p. 294.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 99. p. 228. 1856.

3) Grottrian, Pogg. Ann. 157. p. 130, 237. 1876 u. Pogg. Ann. 160. p. 238. 1877.

4) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 151. 1879.

5) C. Stephan, Wied. Ann. 17. p. 673. 1882.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXV.

verdünnter Salzlösungen hinsichtlich obiger 2 Grössen untersucht und dabei als Lösungsmittel Mischungen aus Wasser und Alkohol benutzt. Er findet folgende Beziehung: Wenn er Leitungsfähigkeit und Reibungscoefficient einer verdünnten alkoholisch-wässerigen Lösung bei constanter Temperatur mit λ und η , die gleichen Grössen für wässerige Lösung mit A und H bezeichnet, dann nähert sich der Ausdruck:

$$q = \frac{4H}{\lambda \cdot \eta}$$

mit zunehmender Verdünnung einer Constanten, die von dem gelösten Salz unabhängig ist und nur in Beziehung steht zum Alkoholgehalt der Lösung. Die Constante q ist bis zum Maximum der inneren Reibung (bei 46 Gewichtsprocenten) der Mischungen von Wasser und Alkohol sehr nahe = 1; wird dann mit zunehmendem Alkoholgehalt grösser und grösser. Bei den wasserreicheren Lösungen bis herauf zum Gehalt maximaler innerer Reibung ist also:

$$(1) \quad \lambda = \frac{c}{\eta},$$

oder: bei constanter Temperatur sind unter obiger Bedingung Leitungsfähigkeit und Reibungscoefficient einander verkehrt proportional. Diese Gleichung möchte ich nun auf den mir vorliegenden Fall anwenden.

Es ist bekannt, dass die Leitungsfähigkeit sehr reinen Wassers der in demselben enthaltenen Verunreinigung nahe proportional ist. Unter Verunreinigung verstehe ich etwa die Zahl der in 100 g Wasser enthaltenen, electrolysirbaren Molecüle und bezeichne sie mit a . Falls obige Proportionalität genau stattfindet, ist Wasser ein Isolator, was wohl ziemlich viel Wahrscheinlichkeit hat. Ich will nun für einen Augenblick annehmen, dass auch die Mischungen von Wasser und Alkohol Isolatoren sind, und dass auch hier die Leitungsfähigkeit proportional der Verunreinigung zunimmt, was sich bei meinen Versuchen nahe bestätigte. Dann kann ich den obigen Satz, der sich auf den Fall verdünnter Lösungen bezieht, auch bei meinen Lösungen annehmen. Bezeichne ich analog

der Bedeutung der Zahl a für reines Wasser mit b die Verunreinigung des von mir angewandten Alkohols, dann ist die Verunreinigung einer Mischung von p Gewichtsprocenten Alkohol:

$$= \frac{a(100-p)}{100} + \frac{b \cdot p}{100} = a + p \cdot \frac{b-a}{100}.$$

Dieser Ausdruck ist der obigen Beziehung (1) noch als Factor hinzuzufügen, um auch der Grösse der Verunreinigung Rechnung zu tragen.

Dann erhalte ich:

$$\lambda = \frac{c_1(1+c_2 p)}{\eta} \text{ oder } \lambda \cdot \eta = c_1(1+c_2 p).$$

Mit Worten: Falls obige Annahmen richtig sind, dann muss, wenn ich für eine Reihe von Mischungen die Producte $\lambda \cdot \eta$ bei constanter Temperatur bilde und dieselben in ein Coordinatennetz als Ordinaten mit p als Abscissen eintrage, innerhalb der Gehalte 0° und 46 Proc. eine Gerade entstehen. Die Möglichkeit, diese Curve zu construiren, liegt nun in der That für die Temperatur 10° vor, für welche Poiseuille¹⁾ die Reibungscoefficienten einer Anzahl Mischungen von Wasser und Alkohol bestimmt hat. Der Gang der Reibungscoefficienten ist ein einfacher: bei 46° Gewichtsproc., dem Maximum der Contraction, tritt auch ein Maximum der inneren Reibung ein, von hier aus nimmt dieselbe nach geringeren und stärkeren Concentrationsgraden stetig ab. In Fig. 10 ist die Curve mit der Bezeichnung $\lambda \cdot \eta$ gezeichnet, um zu zeigen, dass sie erheblich von einer Geraden abweicht.

Schon diese Thatsache deutet darauf hin, dass die Annahme, auf die wir bei obiger Betrachtung fussten, nicht richtig ist, nämlich, dass die Mischungen von Wasser und Alkohol Isolatoren sind.

Dass es in der That speciell die Mischung beider Flüssigkeiten ist, die die Leitungsfähigkeit modificirt, sieht man deutlich, wenn man für die Alkoholgehalte, die den drei singulären Punkten der Leitungsfähigkeitscurve entsprechen, ausrechnet, in welchem Zahlenverhältniss die Wasser- und

1) Poiseuille, Pogg. Ann. 58. p. 437. 1843.

Alkoholmoleculë zu einander stehen. Für das erste Maximum lässt sich wegen der starken Verdünnung ein bestimmtes Zahlenverhältniss nicht angeben. Das Minimum fällt ungefähr auf 30 Proc. Ziemlich genau auf die Stelle fällt der Gehalt einer Mischung aus einem Molecul Alkohol und 6 Moleculen Wasser, nämlich auf 29,9 Proc. Noch auffallender ist das Zusammentreffen des zweiten Maximums mit einem einfachen molecularen Mischungsverhältniss. Zufällig fällt eine direct untersuchte Lösung von 83,4 Proc. mit dem Maximum der Leitungsfähigkeit zusammen und fast auf die gleiche Zahl, nämlich 83,6 Proc., fällt das einfache Mischungsverhältniss von einem Molecul Wasser auf 2 Moleculë Alkohol. Besonders dieses letztere Zusammentreffen halte ich für bedeutsam, es weist mit ziemlicher Sicherheit auf die Thatsache hin, dass wir es bei den Mischungen von Wasser und Alkohol mit Hydratbildungen zu thun haben, also mit wirklichen chemischen Verbindungen, die theils eine grössere, theils eine kleinere Leitungsfähigkeit besitzen, als die Constituenten. Das Minimum der Leitungsfähigkeit λ_0 bei 30 Proc. liegt nämlich weit tiefer als die Leitungsfähigkeiten meines Wassers und meines Alkohols.

Dass wir es in vorliegendem Fall mit wesentlich anderen Erscheinungen, als bei gewöhnlichen Electrolyten zu thun haben, ergibt sich aus folgendem, hierher gehörigem Umstande. Bei gewöhnlichen Electrolyten, etwa bei wässerigen Salzlösungen, welche Maxima des Leitungsvermögens bei bestimmtem Gehalte zeigen, rücken die Maxima mit wachsender Temperatur nach höheren Gehalten fort, in unserem Falle aber coincidiren die Maxima und Minima bei 0 und 15° ziemlich scharf und sind also an den speciellen Gehalt gebunden.

Ich will schliesslich noch einen Punkt berühren, nämlich den von Grotrian in seiner oben citirten Arbeit gefundenen Parallelismus zwischen dem Temperaturcoefficienten der Fluidität (reciproker Werth des Reibungscoefficienten) und Leitungsfähigkeit. Zu einem Vergleich stehen mir nur 3 Zahlen aus der ebenfalls oben citirten Abhandlung von C. Stephan zur Verfügung. Ich stelle in folgender Tabelle

dieselben mit den aus meinen Versuchen sich ergebenden Temperaturcoefficienten derselben Lösungen zusammen.

Tabelle IV.

Procent- gehalt	$\frac{\Delta f_{12}}{f_{10}}$	$\frac{\Delta \lambda_{12}}{\lambda_{10}}$
85,1	0,0408	0,0377
49,0	0,0403	0,0355
70,0	0,0380	0,0290

Man erkennt allerdings qualitativ einen Parallelismus in beiden Reihen und eine Uebereinstimmung in der Grössenordnung, allein zu einem genaueren Zusammenhalt beider Grössen wären ausführlichere Fluiditätsbestimmungen nöthig.

VIII. Ueber das electrische Leitungsvermögen und den Temperaturcoefficienten des festen Quecksilbers; von C. L. Weber.

(Aus dem phys. Laboratorium der technischen Hochschule zu München.)

Die umfassenden Untersuchungen, welche A. Matthiessen vor nahezu 25 Jahren über das Leitungsvermögen der Metalle und ihrer Legirungen durchgeführt hat, ergaben als Resultat, dass sich die Metalle in 2 Gruppen ordnen lassen, sodass die der ersten Gruppe, wenn unter sich legirt, die Electricität im Verhältniss ihrer relativen Volumina leiten, während die der zweiten Gruppe, wenn unter sich oder mit Metallen der ersten Gruppe legirt, eine Leitungsfähigkeit zeigen, welche stets kleiner ist als die, welche sich aus dem Verhältniss ihrer Bestandtheile berechnen lässt.¹⁾

Unter diese Eintheilung fügten sich alle von Matthiessen untersuchten Legirungen mit Ausnahme derjenigen des Quecksilbers. W. Siemens²⁾ versuchte, diese Abweichung der Quecksilberlegirungen dadurch zu erklären, dass er annahm, es sei ihre Leitungsfähigkeit gleich der

1) Matthiessen, Pogg. Ann. 110. p. 190. 1860.

2) W. Siemens, Pogg. Ann. 113. p. 96. 1861.

mittleren Leitungsfähigkeit ihrer Bestandtheile — beide Bestandtheile in flüssigem Zustand gedacht; und Sabine¹⁾ hat auf Grund dieser Annahme aus den beobachteten Leitungsfähigkeiten der flüssigen Amalgame die der Metalle in flüssigem Zustande berechnet. Allein die so gefundenen Zahlen wurden durch directe Beobachtungen nicht bestätigt, sodass jene Annahme, wie Matthiessen gezeigt hat²⁾, nicht genügt, um das eigenthümliche Verhalten der Quecksilberlegirungen zu erklären. Vielmehr sah sich Matthiessen genöthigt, das Quecksilber als Repräsentant einer dritten ganz besonderen Gruppe von Metallen hinzustellen.³⁾

Es möchte demnach den Anschein gewinnen, als ob das Quecksilber überhaupt in Bezug auf sein Leitungsvermögen den anderen Metallen gegenüber eine exceptionelle Stellung einnähme, als ob sein abweichendes Verhalten nicht durch den flüssigen Aggregatzustand allein erklärt werden könnte. Hierauf bezügliche Versuche scheinen seit jener Zeit nicht mehr aufgenommen worden zu sein. Wenigstens besitzen wir keinerlei Angaben darüber, ob das galvanische Verhalten des Quecksilbers in fester Form sich dem der übrigen Metalle nähert, ob ihm z. B. ein ähnlicher Temperaturcoefficient zukommt, und auch die Beobachtungen über das Leitungsvermögen der bei gewöhnlicher Temperatur festen Metalle in geschmolzenem Zustande sind so spärlich, dass es unmöglich ist, aus ihnen entsprechende Anhaltspunkte zu gewinnen.

Da aber doch jener Frage eine gewisse Bedeutung nicht abzusprechen ist, namentlich im Hinblick auf die Beziehungen zwischen galvanischer Leitungsfähigkeit und anderen physikalischen Eigenschaften der Metalle, so möchte ich im Nachstehenden einige Versuche bekannt machen, die das galvanische Verhalten des Quecksilbers in festem Zustande betreffen.

Ich wurde bei der Ausführung derselben dadurch unterstützt, dass mir der Vorstand unseres Laboratoriums, Hr.

1) Sabine, Phil. Mag. 1862. p. 455.

2) Matthiessen u. Vogt, Pogg. Ann. 116. p. 369. 1862.

3) Matthiessen, Pogg. Ann. 114. p. 317. 1861.

Prof. Dr. v. Beetz, eine grössere Menge flüssiger Kohlensäure (aus der Fabrik der Actiengesellschaft für Kohlensäureindustrie, Berlin) zur Verfügung stellte. Ich gestatte mir, demselben hierfür, sowie für seine fortwährende freundlichste Förderung meiner Arbeiten meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Das Quecksilber wurde in U-förmigen Capillarröhren untersucht, an deren Enden weitere Glasröhren von ca 10 mm Durchmesser angeschmolzen waren. Um auf der ganzen Länge des Quecksilberfadens möglichst gleiche Temperatur zu haben, und um nicht allzugrosse Mengen Kohlensäure auf einmal zu verbrauchen, durfte man die Capillare nicht zu lang nehmen; andererseits zeigte sich, dass bei Verwendung sehr enger Capillaren das Quecksilber beim Erstarren Risse und Unterbrechungen bekam. Ich wählte schliesslich Röhren von ca. 180 mm Länge und 1 mm Durchmesser im capillaren Theil. Der zu messende Widerstand war infolge dessen sehr klein (bis zu 0,02 Ohm). Von zwei ineinander geschobenen Cylindergläsern enthielt das innere Aether in welchen die U-Röhre eingetaucht war, das äussere einige Tropfen concentrirter Schwefelsäure oder ebenfalls etwas Aether, um das Beschlagen der Glaswände mit Reif zu vermeiden; man musste nämlich hindurchsehen können, um zu beurtheilen, ob der Quecksilberfaden beim Erstarren nicht gerissen war; denn auch bei den 1 mm weiten Capillaren kam dies noch vor, wenn man die Temperatur zu rasch erniedrigte. Daher durfte man die feste Kohlensäure nur nach und nach in den Aether eintragen, sodass die Temperatur allmählich unter den Gefrierpunkt des Quecksilbers sank. Zur Temperaturmessung dienten Alkoholthermometer, deren Röhren calibrirt waren, der Werth eines Scalentheiles war durch Vergleichung mit einem Geissler'schen Quecksilberthermometer in der Nähe von 0° ermittelt.

War eine hinreichend tiefe Temperatur erreicht, so wurde mit dem Hinzufügen weiterer Kohlensäure innegehalten und, während die Temperatur des Aetherkohlendüngemisches wieder stieg, wurden die Widerstandsmessungen vorgenommen.

Die fortwährend sich entwickelnden und im Aether aufsteigenden Kohlensäurebläschen hielten denselben in steter Wallung, sodass ein Rühren unnöthig war.

Man hatte es also mit sehr kleinen Widerständen zu thun und war genöthigt, rasch zu arbeiten. Dementsprechend benutzte ich zur Widerstandsmessung eine Thomson'sche Brückencombination.

4 Zweige derselben bestanden aus 2 Rollen von je 10 Ohm und zwei solchen von je 100 Ohm Widerstand; als Vergleichswiderstand diente ein ausgespannter Neusilberdraht mit 2 Schleifcontacts. Das Spiegelgalvanometer war stark astasirt.

Die folgende Tab. I gibt eine so erhaltene Beobachtungsreihe.

Tabelle I.

Temp.	W in Ohm	Temp.	W in Ohm	Temp.	W in Ohm
-55,3	0,02802	-45,5	0,02970	-30,8	0,13001
-58,9	2823	-43,9	2994	-18,5	13156
-59,0	2843	-42,4	3021	- 5,6	13300
-51,5	2863	-41,0	3043	\pm 0,0	13372
-50,0	2892	-39,4	3147	+15,8	13576
-48,8	2912	beginnende Schmelzung		+45,1	13949
-47,0	2941	-37,3	5362		

Eine graphische Prüfung der Zahlen ergibt, dass schon bei $-39,4^\circ$ eine beginnende Schmelzung eintrat, der Widerstand steigt schnell auf den dem flüssigen Quecksilber zukommenden Werth, welcher viermal so gross ist, als der Widerstand des festen Quecksilbers beim Schmelzpunkt. Die ersten 11 Beobachtungen gestatten die Bestimmung des Temperaturcoefficienten für das feste Quecksilber. Nimmt man an, dass der Widerstand desselben bei 2 Temperaturen T und t gegeben sei durch die einfache Formel:

$$W = w_0(1 + \alpha T) \quad \text{und} \quad w = w_0(1 + \alpha t),$$

so erhält man:

$$\alpha = \frac{W - w}{wT - wt}.$$

Durch Combination von je 2 der 11 Zahlen, z. B. (1) mit (7); (2) mit (8) etc. ergeben sich für α die Werthe:

Temperaturcoefficienten		
des festen	des flüssigen Hg	
0,004 513	zw. $-30 \text{ u. } \pm 0^\circ$	0,000 901
4 637	$-18 \text{ u. } +15$	932
4 467	$-5,6 \text{ u. } +45$	955
4 634		
4 494		
Mittel: 0,004 549	Mittel: 0,000 927	

Der Vollständigkeit wegen, und um zugleich ein Urtheil über den Werth der Beobachtungen zu haben, wurden die Messungen am flüssigen Hg noch bis null Grad und darüber fortgesetzt. Es ergaben sich die in der zweiten Spalte angegebenen Temperaturcoefficienten, nämlich 0,000 927 als mittlerer Temperaturcoefficient zwischen -30 und $+45^\circ$. Die Uebereinstimmung dieser für flüssiges Quecksilber geltenden Zahl mit den von Matthiessen, Siemens, Rink, Lenz und Retzoff u. a. gegebenen Werthen ist ein Beweis für die Zuverlässigkeit auch der am festen Hg angestellten Messungen.

Mit Hülfe der obigen Formeln findet sich dann auch der Widerstand des festen Hg berechnet für 0° ; dividirt man denselben durch den beobachteten des flüssigen bei 0° , so ergibt sich für den specifischen Widerstand des festen Quecksilbers für 0° berechnet:

$$s_0 = 0,2799 \text{ oder für sein Leitungsvermögen}$$

$$\lambda_0 = 3,572.$$

Niedrigere Temperaturen als -55° wurden zwar wiederholt mit dem Aetherkohlen säuregemisch erzielt, dieselben waren aber so rasch vorübergehend, dass brauchbare Messungen nicht angestellt werden konnten.

Das bei diesen und ähnlich verlaufenden Beobachtungsreihen benutzte Alkoholthermometer hatte ein ziemlich grosses Thermometergefäß, es war infolge dessen die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass bei dem raschen Steigen der Temperatur das Thermometer mit seinen Angaben zurückblieb und zu tiefe Temperaturen zeigte. Um hierüber vollständig sicher zu sein, fertigte ich noch ein zweites Alkoholthermometer an, dessen Kugel aus sehr dünnwandigem Glas nur

5 mm Durchmesser hatte, das Thermometerrohr war ausserordentlich eng.

Die folgende Tabelle gibt eine Versuchsreihe, die mit diesem Alkoholthermometer erhalten wurde.

Tabelle II.

Temp.	W in Ohm	Temp.	W in Ohm	Temperaturcoefficient
-57,2	0,02455	-47,5	0,02578	0,003 992
57,0	2457	46,8	2585	4 096
55,9	2472	45,7	2600	3 970
54,4	2491	44,9	2612	3 884
53,0	2508	43,7	2630	4 311
52,3	2518	42,6	2648	4 000
51,3	2525	42,3	2652	4 468
50,0	2547	38,1	3300	4 226
49,0	2560	35,8	0,10835	Mittel 0,004 111
48,3	2568	$\pm 0,0$	0,11231	

Spec. Widerstand des festen Hg berechnet für 0°:

$$\kappa_0 = 0,2853$$

Leitungsvermögen $\lambda_0 = 3,505$.

Wie aus den beiden Tabellen zu ersehen ist und aus einer graphischen Darstellung der beobachteten Widerstände noch deutlicher hervorgeht, findet beim Schmelzpunkt des Hg kein plötzlicher Sprung im Widerstand statt, es tritt blos ein allerdings schnelles Steigen ein, sodass man noch mehrere Beobachtungen machen konnte, ehe der Widerstand des flüssigen Metalls erreicht war. Man darf jedoch hieraus nicht den Schluss ziehen, dass das Quecksilber durch einen Zustand der Erweichung hindurch von der festen in die flüssige Form übergehe; es ist viel wahrscheinlicher, dass die kupfernen Zuleitungsdrähte eine erhebliche Wärmezufuhr von aussen vermittelten, sodass der Schmelzprocess an den Enden derselben begonnen und sich von da durch die ganze Länge der Capillare fortgeflanzet hat.

Hieraus erklärt sich auch der Umstand, dass der beginnende Schmelzprocess, wie er sich durch das rasche Steigen des Widerstandes bemerkbar macht, nicht genau bei derselben Temperatur eintrat; die Besorgnis betreffs des zuerst verwendeten Thermometers erweist sich aus einer Vergleichung der beiden Versuchsreihen als unbegründet, es

zeigt sogar das zweite Thermometer mit kleinerer Kugel beim Beginn des Schmelzens eine etwas niedrigere Temperatur als das erste.

Stellen wir die Resultate beider Beobachtungen zusammen, so sind dieselben in folgenden Zahlen enthalten.

Es ergibt sich für den Temperaturcoefficienten des festen Quecksilbers

aus Versuch I: $\alpha = 0,00455$

" " II: $\alpha = 0,00411$

im Mittel $\alpha = 0,00433$

für den specifischen Widerstand, resp. das Leitungsvermögen des festen Quecksilbers berechnet für 0° :

Versuch I: $s_0 = 0,2799$ $\lambda_0 = 3,572$

" II: $s_0 = 0,2853$ $\lambda_0 = 3,505$

im Mittel $s_0 = 0,2826$ $\lambda_0 = 3,538$

Die Uebereinstimmung ist grösser, als man bei den obwaltenden Schwierigkeiten erwarten konnte, wenn nämlich in Betracht gezogen wird, dass der ganze zu messende Widerstand den Betrag von einigen Hundertel Ohm nicht überstieg, dass der Temperaturcoefficient innerhalb eines Intervalles von nur 15° zu bestimmen war, dass endlich nur ganz einfache Hilfsmittel zur Verwendung kamen.

Es ergibt sich aus den angeführten Zahlen folgendes:

1) Das Quecksilber erfährt beim Festwerden eine bedeutende Erhöhung seiner Leitungsfähigkeit, dieselbe ist für das feste Metall beim Schmelzpunkt etwa viermal so gross, als für das flüssige unmittelbar vor dem Erstarren. Bezieht man beide Werthe auf 0° , so erhält man für das Leitungsvermögen des festen Quecksilbers die Zahl 3,5.

2) Der Temperaturcoefficient des festen Quecksilbers nähert sich dem der übrigen festen Metalle und wird demselben vermuthlich gleich werden, wenn man sich hinreichend weit vom Schmelzpunkt nach abwärts entfernt.

Es ist zu vermuthen, dass dieser grosse Unterschied in den Leitungsfähigkeiten des festen und des flüssigen Metalls auch auf die Leitungsfähigkeit der bei gewöhnlicher Temperatur festen Amalgame einen wesentlichen Einfluss ausübt.

Ueber die Grösse dieses Einflusses und darüber, ob sich unter Zugrundelegung der obigen Zahlen das abnorme Verhalten der Quecksilberlegirungen aufklären lässt, kann vorläufig nicht geurtheilt werden. Die vorhandenen Angaben über das Leitungsvermögen dieser Legirungen reichen dazu nicht aus, und umfassende Untersuchungen hierüber begehen grossen Schwierigkeiten; denn die meisten Amalgame, welche nicht bei gewöhnlicher Temperatur ganz flüssig sind, entziehen sich den gebräuchlichen Messmethoden infolge ihres eigenthümlichen Aggregatzustandes. — Brauchbare Resultate dürfen vielleicht erwartet werden, wenn man die Inductionswage zur Bestimmung ihrer Leitungsfähigkeiten benutzt.

IX. *Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit*¹⁾; von Karl Strecker.

(Aus den Abhandl. der k. baier. Akad. d. Wiss. II. Cl. 15. Bd. II. Abth. mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die vorliegende Arbeit habe ich unternommen auf Anregung des Hrn. Prof. Kohlrausch als einen Theil der im Auftrage der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften im physikalischen Institut zu Würzburg auszuführenden Bestimmung der Quecksilbercapacität des Ohm.

Ich habe mir die Aufgabe gestellt, die Widerstandscapacität einer Anzahl von Glasröhren aus den Dimensionen derselben abzuleiten, und mit Hülfe dieser Röhren, welche ich mit Quecksilber füllte, mehrere Normaldrahtwiderstände herzustellen. Bei diesen Messungen suchte ich eine Genauigkeit von 0,0001 zu erreichen.

Sowohl bei der Bestimmung der Dimensionen der Röhren, als besonders bei einem Theile der galvanischen Messungen hat sich manches Neue ergeben, was mir mittheilenswerth

1) Im April vorigen Jahres veröffentlichte ich zum Zwecke der Mittheilung auf der electricischen Conferenz zu Paris eine kurze Notiz über meine Untersuchung, welche damals noch nicht vollendet war, in dem Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg 1884. Dieselbe ist auch in Exner's Repert. d. Phys. abgedruckt worden.

erschien; namentlich glaubte ich, die Erfahrungen, welche ich bei der Vergleichung von Widerständen nach der Kirchhoff'schen Methode des Differentialgalvanometers gemacht habe, etwas ausführlich darstellen zu sollen.

Schliesslich habe ich die Gelegenheit benutzt, die von mir hergestellte Quecksilbereinheit mit den gegenwärtig gebräuchlichen Widerstandseinheiten zu vergleichen, nämlich mit der von Siemens und Halske und der von der British Association ausgegebenen Einheit; hierbei standen mir durch die dankenswerthe Güte der Herren Siemens und Frölich, sowie Lord Rayleigh und Glazebrook Stücke zur Verfügung, welche mit besonderer Sorgfalt bestimmt worden waren.

I. Berechnung des Widerstandes einer Quecksilbersäule.

§ 1. Die Normalwiderstände, welche zu meiner Untersuchung dienten, waren gebildet aus mit Quecksilber gefüllten dickwandigen Glasröhren von kleinem Querschnitt. Die Enden dieser Röhren waren eben und senkrecht zur Axe abgeschliffen; sie wurden mittelst durchbohrter Korkstopfen in den seitlichen Tubulaturen passend geformter, oben offener Gläser befestigt, welche die nöthigen Verbindungen vermittelten.

§ 2. Den Widerstand eines solchen Rohres haben wir nun zu berechnen.

Eine Säule Quecksilber von 0° , welche den unveränderlichen Querschnitt Q und die Länge L besitzt, deren Endflächen Ebenen und Niveauflächen sind, hat den Widerstand:

$$\frac{L}{Q}.$$

Taucht die Glasröhre, in welche die Quecksilbersäule eingeschlossen ist, zum Zwecke der galvanischen Verbindung in weite Gefässe, welche zugleich mit jener mit Quecksilber gefüllt werden, so sind die Endebenen der Quecksilbersäule nicht mehr Niveauflächen¹⁾, und der Widerstand wird nicht mehr durch die obige Formel ausgedrückt.

1) Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. p. 610. — Wied. Ann. 11. p. 804. 1880.

Bestimmt man ausserdem den Quecksilberwiderstand zwischen einer Niveaufläche, welche in dem einen angesetzten Electrodengefässe liegt und vom Rohrende ziemlich weit entfernt ist, und einer ebenso gelegenen Niveaufläche im anderen Electrodengefäss, so kommt noch die beiderseitige Stromausbreitung zu obigem Ausdruck hinzu.

Die durch beide Ursachen zugleich bedingte Veränderung des Widerstandes der Röhre entspricht an jedem Ende derselben einer Verlängerung um ein Vielfaches des Radius des Endquerschnittes; also ist der ganze Widerstand:

$$W = \frac{L + a(r_1 + r_2)}{Q}.$$

Nach Maxwell¹⁾ liegt a zwischen 0,785 und 0,824; ich habe, wie früher Rink²⁾ gethan, den Werth $a = 0,80$ gewählt.

Lord Rayleigh und Sidgwick³⁾ und neuerdings Mascart, Nerville und Benoit⁴⁾ haben den Werth 0,82 für a eingesetzt; die letzteren haben einige Versuche angestellt, welche auf diesen Werth von a ungefähr stimmen.

§ 3. Die letzte Formel setzt noch voraus, dass der Querschnitt der Quecksilbersäule überall der gleiche ist; dies ist aber niemals der Fall, wenn man zur Herstellung der letzteren Glasröhren verwendet, welche meistens einen ganz unregelmässig ändernden Querschnitt besitzen.

Um dieser Veränderlichkeit Rechnung zu tragen, denkt man sich die Glasröhre in gleichlange Abschnitte getheilt, welche man als abgestumpfte Kegel ansehen kann. Bedeutet für einen solchen Kegelstumpf q den mittleren Querschnitt, l die Länge und $l \cdot q$ das Volumen, ferner q_1 und q_2 die Endquerschnitte, so ist der Widerstand des Kegelstumpfes⁵⁾:

$$w = \frac{l}{q} \cdot \frac{1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}}{3} = \frac{l}{q} \cdot \left[1 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{q_1 - q_2}{q_2} \right)^2 \left(1 - \frac{q_1 - q_2}{q_2} \right) \right].$$

1) Maxwell, Electr. u. Magnet. I. § 308. 309.

2) Rink, Verslagen en Mededeelingen d. kon. Akad. van Wetensch. Afdeel. Naturkunde. 2. (11). p. 299. 1877.

3) Lord Rayleigh and Mrs. Sidgwick, Phil. Trans. 1. p. 173. 1883.

4) Mascart, Nerville et Benoit, Résumé d'expériences sur la détermination de l'ohm etc. 1884.

5) W. Siemens, Pogg. Ann. 110. p. 1. 1860.

Den Ausdruck:

$$\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{q_1 - q_2}{q_2} \right)^2 \left(1 - \frac{q_1 - q_2}{q_2} \right),$$

eine sehr kleine Grösse, will ich mit K bezeichnen und schreibe:

$$w = \frac{1}{q} \cdot (1 + K).$$

§ 4. Um die mittleren Querschnitte aller Rohrabchnitte zu vergleichen, calibriert man das Rohr mit einem Quecksilberfaden, der im Mittel nahezu die Länge 1 besitzt.

Zu diesem Zwecke wurde das zu untersuchende Rohr auf einem in Millimeter getheilten Maassstabe befestigt, dessen Theilfehler kleiner als 0,05 mm waren. Dieser Maassstab diente dazu, das Rohr in Abschnitte zu theilen und die Länge des Quecksilberfadens zu messen. Letzteres geschah mit Hülfe eines auf den Maassstab aufgelegten Spiegels durch Ablesung mit blossen Auge; die Länge λ des Fadens wurde bestimmt, wenn die Mitte des Fadens mit der Mitte eines Rohrabchnittes zusammenfiel, was leicht und mit Genauigkeit mittelst einer kleinen Luftdruckvorrichtung erreicht werden konnte.

Bedeutet v das constante Volumen des Quecksilberfadens, dessen veränderliche Länge wir mit λ bezeichnet haben, τ den Querschnitt in der Mitte des Quecksilberfadens und also auch in der Mitte des betreffenden Rohrabchnittes, so ist:

$$q = \tau \left(1 + \frac{1}{4} K \right), \quad r = \frac{v}{q} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda^2}{l^2} \cdot K \right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{l} \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \cdot K \right),$$

$$\text{und: } w = l \cdot \frac{\lambda}{v} \left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \right) \cdot K \right].$$

Der Widerstand des ganzen Rohres ohne den Ausbreitungswiderstand berechnet sich also zu:

$$W' = \sum w = \frac{1}{v} \cdot \sum \lambda \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \right) \cdot K \right].$$

Das Volumen eines Rohrabchnittes ist:

$$l \cdot q = l \cdot \frac{v}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \cdot K \right],$$

also das Volumen des ganzen Rohres:

$$V = v \cdot \sum \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \cdot K \right].$$

Demnach wird:

$$W' = \frac{l^2}{V} \cdot \sum \lambda \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \right) K \right] \cdot \sum \frac{1}{\lambda} \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \cdot K \right],$$

und unter Vernachlässigung des Gliedes, welches in Bezug auf K von der zweiten Dimension ist:

$$W' = \frac{l^2}{V} \cdot \left\{ \sum \lambda \cdot \sum \frac{1}{\lambda} + \sum \frac{1}{\lambda} \cdot \sum \lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \cdot K \right) - \sum \lambda \cdot \sum \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} K \right\}.$$

§ 5. In den beiden letzten Gliedern dieses Ausdruckes, welche gegen das erste sehr klein sind, setze ich $\sum \lambda = nS$, wobei n die Anzahl der Messungen der Fadenlänge, S den mittleren Werth der letzteren bedeutet; statt $\sum (1/\lambda)$ setze ich näherungsweise n/S ; dann werden die beiden kleinen Glieder:

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{S} \cdot \left[\sum \lambda \left(1 + \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} \right) K - S^2 \cdot \sum \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2 - l^2}{4l^2} K \right] \\ &= \frac{n}{S} \cdot \sum \left[K \left(\lambda + \frac{(\lambda^2 - S^2)(\lambda^2 - l^2)}{\lambda \cdot 4l^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auf die Form bringen:

$$\frac{n}{S} \cdot \left[l \cdot \sum K + \sum K(\lambda - l) \left(1 + \frac{\lambda - S}{l} \right) \right].$$

Von den beiden Theilen des in der eckigen Klammer stehenden Ausdruckes ist der erste nur aus positiven Werthen zusammengesetzt, während der zweite positive und negative Glieder enthält; ausserdem sind die einzelnen Bestandtheile der zweiten Summe an absoluter Grösse weit geringer als die der ersten. Führt man die Rechnung an einem Beispiele aus, so sieht man, dass $\sum K(\lambda - l) \left(1 + (\lambda - S)/l \right)$ noch nicht den hundertsten Theil des in der Klammer stehenden Werthes ausmacht; da der letztere überhaupt sehr gering ist und nur bei Röhren von wenig gleichmässigem Querschnitt einige Hunderttausendtel des zu berechnenden Widerstandes aus-

macht, so darf man den zweiten Summanden aus obiger Klammer weglassen.

§ 6. Damit wird unsere Formel¹⁾:

$$W' = \frac{l^3}{V} \cdot \left[\Sigma \lambda \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} + \frac{n^3}{S} \cdot \Sigma K \right].$$

Dieser Ausdruck ist für die numerische Berechnung noch sehr unbequem; um das Glied $\Sigma \lambda \cdot \Sigma (1/\lambda)$ umzugestalten, will ich eine Grösse s einführen, welche bis auf einen im Belieben des Rechners liegenden kleinen Betrag der mittleren Fadenlänge $S = (1/n) \cdot \Sigma \lambda$ gleich ist.

Dann sei: $\Sigma \lambda = ns + D$,
worin D eine gegen ns kleine Grösse ist. Ferner kann ich schreiben:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda-s}{s}} = \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{\lambda-s}{s} + \left(\frac{\lambda-s}{s} \right)^2 - \dots \right].$$

Damit wird:

$$\Sigma \lambda \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} = [ns + D] \cdot \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{\lambda-s}{s} + \left(\frac{\lambda-s}{s} \right)^2 - \dots \right]$$

$$= n^2 \left(1 + \frac{D}{ns} \right) \left(1 - \frac{1}{ns} \Sigma (\lambda-s) + \frac{1}{ns^2} \cdot \Sigma (\lambda-s)^2 - \dots \right)$$

$$\Sigma (\lambda-s) = \Sigma \lambda - ns = D,$$

$$\Sigma \lambda \cdot \Sigma \frac{1}{\lambda} = n^2 \left(1 + \frac{D}{ns} \right) \left(1 - \frac{D}{ns} + \frac{1}{ns^2} \cdot \Sigma (\lambda-s)^2 - \dots \right),$$

$$W' = \frac{n^2 l^3}{V} \left\{ 1 + \frac{1}{ns^2} \cdot \left[\Sigma (\lambda-s)^2 - \frac{1}{s} \Sigma (\lambda-s)^3 + \frac{1}{s^2} \Sigma (\lambda-s)^4 - \dots \right] \right. \\ \left. \left[1 + \frac{D}{ns} \right] - \left(\frac{D}{ns} \right)^2 + \frac{1}{ns} \cdot \Sigma K \right\}.$$

Dieser Formel liegt eine Calibrirung zu Grunde, bei welcher man das Rohr in Abschnitte von der constanten Länge l getheilt hatte; indem die Mitte des zur Calibrirung dienenden Quecksilberfadens immer um die Länge l verschoben wurde, mass man die Länge des Fadens in jedem Rohrabschnitt. Der Anfangspunkt für die genannte Einteilung der Röhre ist durchaus willkürlich; daraus folgt,

1) Vgl. Maxwell, Electr. u. Magn. 1. § 361. — Matthiessen, Rep. of electr. standards. p. 128. Third report 1864.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXV.

dass man jede beliebige Strecke der Röhre von der Länge l als Rohrabschnitt ansehen kann; man darf also die obige Formel auch anwenden, wenn die Mitte des Quecksilberfadens nicht um l , sondern um einen beliebigen Theil von l verschoben und in jeder neuen Lage die Länge des Fadens gemessen wird; gefordert ist nur, dass die Punkte, an denen die Rohrquerschnitte verglichen werden, durchaus gleichmässig über das ganze Rohr vertheilt seien, und dass man folgerichtig für die Rohrenden, wo eine Messung des Quecksilberfadens unmöglich wird, die Fadenlänge durch Extrapoliren berechnet.

Für die Länge l habe ich 40 mm gewählt, die Mitte des Quecksilberfadens habe ich immer um 10 mm verschoben.

Der Ausdruck K , welcher in der Formel für W vorkommt, enthält die Endquerschnitte der einzelnen Abtheilungen der Röhre; es genügt, hier die Querschnitte umgekehrt proportional zu setzen den Längen λ_1 und λ_2 des Quecksilberfadens, welche beobachtet werden, wenn die Mitte des Fadens mit dem Anfange oder dem Ende eines Rohrabschnittes zusammenfällt. Dadurch wird:

$$K = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \right)^2 \left(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \right).$$

Die Längen λ_1 und λ_2 liefert die Calibrirung zugleich mit λ , wenn man die Fadenmitte immer um 10 mm verschiebt.

Bei der Berechnung von $l \Sigma K$ darf man sich weitere Vernachlässigungen erlauben, indem man in dem Ausdruck für K den Factor $1 - ((\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1)$ weglässt und statt $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ den nahe gleichen Bruch $(\lambda_2 - \lambda_1)/l$ setzt. Dann hat man statt $l \Sigma K$ den bequem zu berechnenden Ausdruck:

$$\frac{1}{12 \cdot l} \cdot \Sigma (\lambda_1 - \lambda_2)^2,$$

welcher dem richtigen Werth von $l \Sigma K$ fast immer genau genug gleich ist.

§ 7. Eine Berechnung der Caliber correction nach der eben entwickelten Formel ist verhältnissmässig einfach; bei recht guten Röhren ist nur die Summe der Quadrate und Cuben zu ermitteln; bei Röhren von weniger gutem Caliber

muss man allerdings bis zu der Summe der sechsten Potenzen fortschreiten, doch ist die Berechnung der Summen höherer Ordnung als der dritten mit nur wenigen Ziffern auszuführen.

Was die bei der Bestimmung der Calibercorrection zu erreichende Genauigkeit betrifft, so hängt dieselbe wesentlich davon ab, ob die gewählte Länge l klein genug ist, um die Voraussetzung zu rechtfertigen, von der wir ausgegangen sind, dass nämlich jedes Stück der Röhre von dieser Länge l als abgestumpfter Kegel betrachtet werden kann. Man darf nicht sehr kurze Quecksilberfäden nehmen, weil man sonst die Aenderungen der Fadenlänge nicht genau genug beobachten kann; deshalb habe ich l nicht kleiner als 40 mm genommen.

Von der Wahl dieser Länge abgesehen, wird man durch grosse Anzahl der Messungen von l jedenfalls eine sehr grosse Genauigkeit erreichen können. Bei meinen Röhren betrug die Anzahl der gemessenen Fadenlängen 120 bis 150; ich glaube, aus angestellten Versuchen schliessen zu dürfen, dass die bei der Calibrirung gemachten Beobachtungsfehler nur einen Einfluss von wenigen Hunderttausendtheilen auf das Resultat haben. Etwas anderes ist die Frage, ob bei allen meinen Röhren die Länge von 40 mm für l ausreichend klein war, um die Calibercorrection richtig zu bestimmen. Ich werde darauf später zurückkommen.

§ 8. Ich setze zur Abkürzung:

$$C = 1 + \frac{1}{ns} \cdot \left[\sum (\lambda - s)^2 - \frac{1}{s} \sum (\lambda - s)^3 + \frac{1}{s^2} \sum (\lambda - s)^4 - \dots \right] \cdot \left[1 + \frac{D}{ns} \right] - \left(\frac{D}{ns} \right)^2 + \frac{1}{ns} \frac{\sum K}{S}.$$

und habe dann: $W' = C \cdot \frac{n^2 l^2}{V} = C \cdot \frac{L^2}{V}.$

Das Volumen der Röhre wird durch Wägung der Masse Quecksilbers gefunden, welche das Rohr bei einer gemessenen Temperatur gerade füllt; ist diese Masse = M , die Dichtigkeit des Quecksilbers bei der beobachteten Temperatur = D , so ist:

$$W' = C \cdot \frac{L^2 D}{M}.$$

Um auch den Ausbreitungswiderstand richtig hinzuzufügen, hat man zu berücksichtigen, dass in diesem Ausdrucke für W statt des Querschnittes Q :

$$\frac{M}{LD}$$

steht; wir haben also den gesammten Widerstand der Quecksilberrohre:

$$W = C \cdot \frac{LD}{M} \cdot [L + a(r_1 + r_2)].$$

Ist der spezifische Leitungswiderstand des Quecksilbers nicht = 1, sondern = σ , so ist:

$$W = \sigma \cdot C \cdot \frac{LD}{M} \cdot [L + a(r_1 + r_2)].$$

Um den Widerstand W als die in Metern ausgedrückte Länge einer Säule Quecksilbers von 0° und von 1 qmm Querschnitt zu erhalten, hat man in diese Formel L und r in Metern und M in Grammen einzusetzen und als Einheit des spezifischen Widerstandes denjenigen des Quecksilbers bei 0° zu nehmen.

II. Normalröhren.

§ 9. Herstellung der Normalröhren. Bei der Auswahl meiner Röhren nahm ich darauf Rücksicht, sowohl solche von möglichst constantem Querschnitt, als auch solche von weniger gutem Caliber zu verwenden; ich wählte schliesslich 5 Röhren, von denen zwei sehr gut, eine von mittlerer und zwei von geringerer Güte des Calibers waren. Die Längen der Röhren betrugen 1,2 und 1,5 m, die Querschnitte zwischen 0,5 und 3,5 qmm. Die Widerstände verhielten sich ungefähr wie 1:3:4:7:9.

Die Enden dieser Röhren wurden mit Schmirgel und Terpentinöl auf einer Kupferscheibe eben und senkrecht zur Axe abgeschliffen; ich benutzte dazu die Drehbank, auf der ich zunächst die Kupferscheibe genau eben und senkrecht zur Drehaxe abdrehete; dann wurde die parallel der Axe in festen Lagern eingeklemmte Glasröhre sanft gegen die rotirende Kupferscheibe gedrückt, während die letztere fortwährend mit einem dünnen Brei von Schmirgel und Terpentinöl benetzt wurde.

Um zu prüfen, ob die Endflächen hinreichend eben geschliffen seien, drückte ich ein Plättchen aus mattem Glase mit ganz wenig Fett auf das Rohrende; wo sich die Glasflächen berührten, wurde das Plättchen durchsichtig. Das Schleifen wurde so lange fortgesetzt, bis die Probe mit dem Glasplättchen zeigte, dass die Endflächen fast genau eben, jedoch noch schwach convex seien; denn ein Vortreten der Ränder gegen die Rohrmitte würde zu Fehlern bei der Längenmessung und Volumenbestimmung der Röhren Veranlassung gegeben haben. Grosse Sorgfalt wurde verwendet, den inneren Rand der Glasröhren beim Schleifen nicht auspringen zu lassen.

Ausmessung der Dimensionen der Normalröhren.

§ 10. Messung der Rohrlänge. Die Länge der Quecksilbersäule, welche ein Rohr aufnahm, konnte nicht unmittelbar gemessen werden. Man durfte nicht den an einer beliebigen Stelle gemessenen Abstand der beiden Endflächen für diese Länge setzen, da ja diese Flächen nicht genau Ebenen und nur nach dem Augenmaass senkrecht zur Axe geschliffen waren.

Ich kittete nun 1,5 mm dicke, runde Milchglasplättchen, welche die Grösse der Endflächen besaßen und eben waren, auf die letzteren; wenn man den Abstand der Ränder der aufgekitteten Plättchen auf zwei diametral gegenüberliegenden Seiten der Röhre mass, so lieferte das arithmetische Mittel einen richtigen Werth für die Länge der Quecksilbersäule, welche das Rohr aufnahm.

Die Abstände der Plattenränder wurden gemessen mit Hülfe eines 2 m langen Glasmaassstabes, der auf dem grössten Theil seiner Länge in Centimeter getheilt war und an jedem Ende eine 10 cm lange Theilung in Millimeter trug. Dieser Maassstab, ein Spiegelglasstreifen von 8 cm Breite und 1 cm Dicke, wurde mit der Theilung nach unten auf die Röhre gelegt, durch untergeschobene Holzklötzchen und Keile dafür gesorgt, dass die Röhre gerade lag und die Theilung des Maassstabes auf ihrer ganzen Länge berührte. Die Abstände der Ränder der Milchglasplättchen von den

nächstgelegenen Theilstrichen des Maassstabes wurden mit einem Mikroskop mit Ocularmikrometer gemessen; das letztere theilte 1 mm des Maassstabes in Zehntel, und man konnte sicher noch 0,02 mm schätzen. Zugleich überzeugte man sich, dass die Dicke der Kittschicht, welche die Plättchen mit den Röhren verband, so gering war, dass man sie bei der angewandten schwachen Vergrösserung gar nicht wahrnehmen konnte.

Bei jeder Messung wurden beide Ränder jedes Plättchens auf den Maassstab eingeschätzt. Nachdem in einer Lage der Röhre 3 Messungen ausgeführt worden, drehte man dieselbe um 180° und wiederholte die dreimalige Messung. Die zusammengehörigen Bestimmungen lieferten auf etwa 0,03 mm dieselben Werthe.

Die Abstände derselben Plattenränder, gemessen in zwei um 180° verschiedenen Lagen des Rohres, unterschieden sich höchstens um 0,05 mm.

Die Dicke der Milchglasplättchen wurde mit dem Sphärometer bestimmt. Es zeigte sich, dass die mit Hülfe der äusseren Plattenränder bestimmte Rohrlänge ein wenig grösser ausgefallen war, als die mit Hülfe der inneren Ränder ermittelte; doch betrug der Unterschied immer weniger als 0,04 mm.

Schliesslich wurde der benutzte Glasmaassstab mit einem Normalmeter verglichen, das von der Normalaichungscommission in Berlin ausgegeben und mit einem Verzeichniss der Theilfehler versehen war. Die Vergleichung geschah unter Anwendung des oben benutzten Mikroskopes mit Ocularmikrometer, indem der Glasmaassstab mit der Theilung nach unten auf den Normalmaassstab gelegt wurde.

Die Genauigkeit, mit welcher die Rohrlänge gemessen wurde, ist nach dem eben Gesagten grösser als 0,05 mm.

§ 11. Ausbreitungswiderstand. Um die Werthe von r_1 und r_2 zu erhalten, berechnet man aus M , L und D den mittleren Radius des Rohres und benutzt die durch die Calibrirung bekannten Verhältnisse des mittleren Querschnittes zu den Endquerschnitten. Ist r der mittlere Radius, λ_1 und λ_2 die erste und die letzte der gemessenen Längen

des Quecksilberfadens, $S = (1/n) \sum l$ die mittlere Länge desselben, so ist:

$$r = \sqrt{\frac{M}{L \cdot D \cdot \pi}}$$

$$a(r_1 + r_2) = ar \cdot \left(\sqrt{\frac{S}{\lambda_a}} + \sqrt{\frac{S}{\lambda_g}} \right).$$

Der Ausbreitungswiderstand beträgt für meine Röhren zwischen 0,6 und 2 mm; da der Factor a bis auf etwa 3 Proc. bekannt ist, wird man die in Frage kommenden Grössen bis auf 0,02 bis 0,06 mm genau bestimmen können.

Das in der Formel für W stehende Product:

$$L \cdot [L + a(r_1 + r_2)]$$

wird also im äussersten Fall um 0,0001 unsicher sein.

§ 12. Auswägung der Röhren. Die Bestimmung der Masse der Quecksilberfüllung einer Röhre wurde auf folgende Art und Weise ausgeführt, welche mir auch erlaubte, jedesmal nach dem Gebrauche eines Normalrohres dasjenige Quecksilber zu wägen, welches zur Herstellung des Widerstandes gedient hatte.

Das sorgfältig gereinigte und getrocknete Glasrohr war mit Hilfe zweier durchbohrter Korke in den seitlichen Oeffnungen der beiden oben offenen Glasgefässe befestigt, welche zur Aufnahme der Electroden dienten. In das eine dieser Gefässe wurde Quecksilber eingegossen, welches dann langsam durch die Röhre strömte und auch das andere Electrodengefäss anfüllte.

Um den Quecksilberinhalt des Rohres zu wägen, verschloss man (nach Entfernung der Electroden aus den Endgefässen) das eine Ende des gefüllten Rohres unter Quecksilber mit einem ebenen Eisenplättchen, das an einer Feder befestigt war (vgl. Fig. 1), und saugte das in dem anderen Electrodengefäss befindliche Quecksilber aus. Dabei war nicht zu vermeiden, dass aus dem offenen Rohrende eine kleine Menge Quecksilber mit fortgenommen wurde; um diese zu ersetzen, hob man vorsichtig das verschliessende Eisenplättchen am anderen Ende ein wenig, damit etwas Quecksilber nachfliessen konnte, doch nur so viel, dass an dem

freien Rohrende ein Meniscus entstand. Nun wurde auch das Endgefäss, in welchem sich das verschliessende Eisenplättchen befand, von Quecksilber entleert, darauf der am offenen Rohrende befindliche Meniscus mit einer ebenen Glasplatte weggedrückt und über dieses Rohrende ein Gefäss geschoben, das zur Aufnahme des Quecksilbers diente; dieses Gefäss war aus Glas gefertigt und hatte eine seitliche Oeffnung, die gerade gross genug war, das Rohrende durchzulassen.

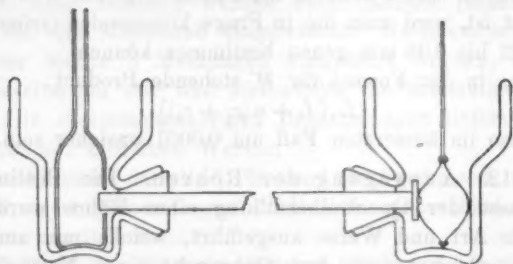


Fig. 1.

Nachdem das Gefäss über das offene Rohrende geschoben und in seiner Stellung durch etwas weiches Papier, das man in das Electrodengefäss einschob, befestigt worden war, hob man das verschlossene Ende der Röhre ein wenig in die Höhe, entfernte die Eisenplatte und liess die Quecksilberfüllung langsam in das zum Auffangen bestimmte Gefäss fliessen; der letzte im Rohr bleibende grössere Tropfen wurde durch vorsichtiges Blasen herausgebracht. Nun haften noch manchmal ganz winzige Quecksilbertröpfchen im Rohr nahe den Enden; dieselben konnte man mit Hilfe eines feinen Drahtes leicht herausschaffen und der grösseren Menge zufügen.

Die beschriebenen Operationen waren leicht und bequem auszuführen; von etwa 30 Entleerungen der Röhre, welche ich auf diese Weise vornahm, misslangen nur zwei; anfänglich hatte die Schliessfeder eine andere Gestalt, welche weniger günstig war, sodass die Versuche öfter fehlschlagen.

§ 13. Das Quecksilber wurde in dem Gefäss gewogen, in dem es aufgefangen wurde. Ich benutzte dazu eine sehr

gute Rüprecht'sche Wage, welche auf 1 mg einen Ausschlag von 1 mm gab und sehr constante Einstellungen lieferte.

Der Gewichtsatz bestand aus vergoldetem Messing, war vor diesen Wägungen calibriert und mit einem 100-g-Stück der Normalaichungscommission in Berlin verglichen worden. Alle meine Wägungen waren Doppelwägungen.

War das gefundene scheinbare Gewicht einer Quecksilbermasse in Grammen gleich M , so wurde zur Reduction auf den leeren Raum davon abgezogen:

$$M \cdot 0,054 \text{ mg.}$$

Von der Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers wird weiter unten (§ 14) die Rede sein.

Nachdem ich vorgängig etwa 30 Auswägungen meiner 5 Röhren vorgenommen hatte, um die Uebereinstimmung der Resultate zu prüfen, habe ich im Laufe der späteren Widerstandsbestimmungen nochmals ebenso viele Wägungen ausgeführt. Die Resultate aller dieser Bestimmungen mitzutheilen, dürfte wenig Zweck haben; ich will vielmehr eine Tabelle geben, welche ein Urtheil über die Genauigkeit derselben ermöglicht.

Die erste wagerechte Zeile dieser Tabelle enthält die Grösse der vorkommenden Abweichungen der Einzelbestimmungen vom Mittel in Zehntausendeln des Ganzen; die senkrechten Spalten geben für jedes Rohr an, wie viele der Bestimmungen seines Quecksilberinhaltes (reducirt auf eine gemeinschaftliche Temperatur) Abweichungen zeigen, welche innerhalb der in der obersten Zeile gegebenen Grenzen liegen.

Rohr-Nr.	0,0-0,25	0,26-0,50	0,51-0,75	0,76-1,00	1,0-1,3	1,3-1,6	1,8	Summe
1	6	1	0	2	0	0	0	9
2	11	2	1	0	0	1	1	16
3	4	5	1	0	0	1	0	11
4	6	4	2	0	0	0	0	12
5	8	1	2	2	0	0	0	13
Summe	35	13	6	4	0	2	1	61

Ich verfolgte ursprünglich den Zweck, durch die Wägung der Quecksilbermasse, welche die Füllung einer Röhre ge-

bildet und zur Herstellung eines Widerstandes gedient hatte, mich gegen etwaige Veränderlichkeit dieser Masse zu sichern; die angegebene Tabelle zeigt, dass eine solche Veränderlichkeit nicht vorhanden ist; die beobachteten Differenzen der Einzelwerthe vom Mittel, von denen $\frac{4}{5}$ kleiner als 0,00005 und nur $\frac{1}{20}$ grösser als 0,0001 sind, lassen sich durch Beobachtungsfehler erklären. Man darf also, wie andere bereits gethan haben, die Masse Quecksilbers, welche das Rohr bei einer gegebenen Temperatur aufnehmen kann, als eine Constante des Rohres ansehen. Deshalb habe ich der Berechnung der Widerstände der Röhren die Mittelwerthe aus sämmtlichen Massenbestimmungen zu Grunde gelegt; die einzelne Wägung nach jeder Widerstandsbestimmung dient dann nur zur Controle.

Von den 3 Fällen, in welchen die beobachtete Abweichung vom Mittel die Grösse von 0,0001 übersteigt, entfällt einer auf die vorgängige Auswägung der Röhren, wobei noch keine Widerstandsmessungen vorgenommen wurden, einer wurde bei Untersuchungen von untergeordneter Bedeutung beobachtet (§ 35), und nur der dritte trifft eine Bestimmung von Wichtigkeit (§ 42, 1, 2). Ich werde die Messungen, bei denen die grossen Abweichungen wahrgenommen wurden, besonders hervorheben.

Die der Berechnung der Widerstände der Normalröhren zu Grunde liegenden Mittelwerthe für die Massen der Quecksilberfüllungen sind ohne Zweifel auf einige Hunderttausendtel richtig.

§ 14. Temperaturbestimmung. Um die Temperatur des Quecksilbers zu bestimmen, welches in einer Röhre enthalten war, brachte ich die letztere in ein Wasserbad, welches aus einem 1,6 m langen, 10 cm breiten und 10 cm hohen Troge aus Zinkblech bestand, der auf den Seiten und am Boden mit Filz umhüllt war und mit einem Holzdeckel geschlossen wurde. Das Wasser stand im Troge so hoch, dass alle mit Quecksilber gefüllten Theile der Röhre und der Electrodengefässe von Wasser umgeben waren, und es auch während der beim Entleeren der Röhre nöthigen Manipulationen blieben.

In dem Deckel des Wasserbades befanden sich 2 Löcher, in welchen Thermometer befestigt wurden; wenn der Deckel auf dem Bade lag, waren die Gefässe der beiden Thermometer in gleicher Höhe mit der Quecksilberhöhe.

War die Temperatur des Bades längere Zeit hindurch constant geblieben, so wurde das Mittel aus den Angaben dieser Thermometer als die Temperatur des im Rohre befindlichen Quecksilbers angesehen; die beiden Thermometer stimmten immer bis auf Theile von $0,1^{\circ}$ überein. Die Aenderung der Temperatur betrug nie mehr als wenige Hundertelgrade in der Viertelstunde.

Ich benutzte mehrere sogenannte Normalthermometer, vier von O. Wiegand in Würzburg (im Februar 1882) verfertigte, welche in Zehntelgrade getheilt waren, und eines von Geissler in Bonn (seit 1873 in Gebrauch), welches Fünftelgrade zeigte; bei allen konnte man noch $0,02^{\circ}$ mit Sicherheit schätzen. Die Nullpunkte dieser Thermometer bestimmte ich häufig; ausserdem verglich ich die Thermometer unter einander und zwei derselben mit dem Luftthermometer bei 10 und 20° ; die letztere Vergleichung war auf mindestens $0,05^{\circ}$ genau, sodass die auf das Luftthermometer bezogenen Angaben meiner Quecksilberthermometer als auf $0,05$ bis $0,08^{\circ}$ richtig anzusehen sind; $0,11^{\circ}$ bedeutet ein Zehntausendtel des Widerstandes.

§ 15. Reinigung des Quecksilbers, spezifischer Widerstand und Dichtigkeit desselben. Das Quecksilber reinigte ich auf folgende Weise:

Eine grössere Menge des Metalles wurde mit fünfprocentiger Salpetersäure und darauf mit Wasser gewaschen, indem es aus feinen Oeffnungen in kleinen Tröpfchen durch eine etwa $1,5$ m hohe Schicht der Waschflüssigkeit fiel; dann wurde es unter mässigem Erwärmen getrocknet und in einen Destillationsapparat gebracht.

Dieser war dem von L. Weber¹⁾ beschriebenen continuirlich arbeitenden Apparate nachgebildet; er besass oberhalb des Siedegefässes einen seitlichen Ansatz mit Hahn, um den

1) L. Weber, Carl's Rep. 15. p. 52. 1879.

Apparat mit der Luftpumpe verbinden zu können; das Gefäss, in dem sich das Destillationsproduct sammelte, und aus dem es in eine untergesetzte Glasflasche ausfloss, war möglichst klein genommen. Nachdem eine grössere Menge Quecksilber destillirt worden, entfernte ich den Rückstand, reinigte den Apparat und brachte das Product der ersten Destillation nochmals in denselben. Erst nach dieser Wiederholung der Destillation wurde das Quecksilber als rein angesehen.

Dieses Quecksilber zeigte immer das gleiche Leitungsvermögen, einerlei, ob es frisch destillirt, oder ob es schon Monate lang in Glasflaschen aufbewahrt worden, einerlei, ob es luftfrei oder mit Luft geschüttelt war. Die hierzu gehörigen Versuche sollen weiter unten ihre Stelle finden (§ 35, 36).

Um indess jede Unsicherheit, welche in dieser Beziehung entstehen konnte, zu vermeiden, zog ich es vor, zu definitiven Messungen nur Quecksilber zu verwenden, welches noch nicht gebraucht worden war.

Von der Bestimmung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers bei Temperaturen zwischen 0 und 20° wird ebenfalls weiter unten die Rede sein (§ 37). Ich will hier nur angeben, dass ich denselben innerhalb der genannten Grenzen bei der Temperatur t (nach dem Luftthermometer) zu:

$$\sigma_t = 1 + 0,000\,900\,t + 0,000\,000\,45\,t^2$$

bestimmt habe, und dass diese Formel meine Beobachtungen bis auf wenige Hunderttausendtel genau wiedergibt.¹⁾

Die Dichtigkeit des Quecksilbers berechnete ich aus den Regnault'schen Zahlen und den von Wüllner²⁾ angegebenen Temperaturcoefficienten.

§ 16. Normaltemperatur. Sämmtliche Messungen wurden bei Temperaturen zwischen 8 und 17° angestellt. Ich reducire alle Angaben auf 10° C., gemessen nach dem Luftthermometer.

1) Die in meiner früheren Mittheilung angegebenen Werthe für specifischen Widerstand und Temperaturcoefficienten sind nach dem Quecksilberthermometer bestimmt.

2) Wüllner, Pogg. Ann. 153. p. 440. 1874.

Für diese Temperatur ist:

$$W_{10} = 1,00904 \cdot C \cdot \frac{13,5713 \cdot L_{10}}{M_{10}} \cdot [L_{10} + a(r_1 + r_2)]$$

und für irgend eine andere Temperatur t zwischen 0 und 20° (unter Berücksichtigung der Ausdehnung des Glases):

$$W_t = W_{10} \cdot \frac{\sigma_t}{\sigma_{10}} = W_{10} \cdot [1 + 0,000892(t - 10) + 0,0000045(t^2 - 100)],$$

wofür bei kleinen Temperaturintervallen auch genügt:

$$W_t = W_{10} \cdot [1 + 0,00090(t - 10)].$$

§ 17. Resultate der Ausmessung der Dimensionen der Normalröhren. Die Constanten meiner 5 Röhren, bezogen auf die Normaltemperatur von 10° C. (nach dem Luftthermometer), sind in der nachfolgenden Tabelle vereinigt. Die beigelegte Zeichnung (Fig. 2 a. f. S.) gibt die Querschnittsänderungen der Röhren; die letzteren selbst sind als Abscissenaxen gedacht und die Querschnitte als Ordinaten aufgetragen. Wo der Rohrquerschnitt gleich dem mittleren Querschnitt ist, wird dies durch eine kurze horizontale Linie angezeigt; der mittlere Querschnitt ist bei allen Röhren durch die gleiche Grösse ausgedrückt. Die Abscissenaxen, welche auf der Figur nicht angegeben sind, würden für jede der 5 Curven 63 mm von der dem mittleren Querschnitt entsprechenden Horizontalen entfernt sein.

Tabelle I.

Nr.	C	L_{10}	M_{10}	$a(r_1 + r_2)$	W_{10}
		m	g	m	$\frac{m}{mm^2}$ Hg von 0°
1	1,00464	1,51017	88,5200	0,00195	0,35490
2	1,00692	1,20673	20,1113	0,00098	0,99921
3	1,00051	1,23409	15,2109	0,00086	1,37275
4	1,00225	1,50994	12,2647	0,00070	2,55252
5	1,00066	1,50582	9,8908	0,00063	3,20763

Die Röhren Nr. 3 und 5 sind von gutem Caliber, Nr. 4 von mittlerer, Nr. 1 und 2 von geringer Güte; beim Berechnen der Mittelwerthe sollen die Zahlen, welche durch Messungen mit den Röhren 3 und 5 erhalten wurden, das drei-

fache Gewicht, und die von Rohr 4 herrührenden das doppelte Gewicht bekommen, wie die mit Hülfe von Nr. 1 und 2 bestimmten.

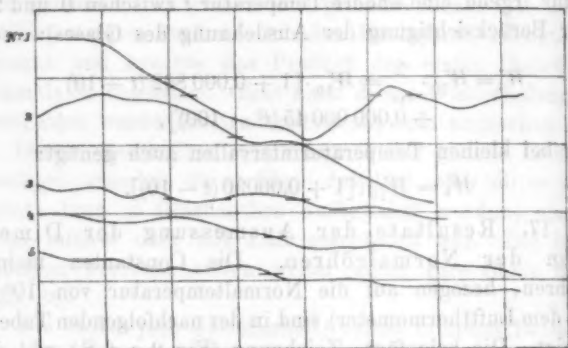


Fig. 2.

III. Drahtwiderstände.

§ 18. Die Widerstände der 5 Quecksilberröhren wurden in Neusilberdraht copirt; von jeder Röhre stellte ich 3 Copien her, wozu ich zwei verschiedene Sorten Neusilberdraht benutzte.

Die eine Sorte wurde gewählt, weil sie schon 1879 aus der Fabrik bezogen worden war; sie hatte freilich einen specifischen Widerstand von nur 0,18 und einen grossen Temperaturcoefficienten; die Aenderung ihres Widerstandes mit der Temperatur zwischen 0 und 20° wird dargestellt durch die Formel:

$$w_t = w_0 (1 + 0,000\,666\,t - 0,000\,000\,8\,t^2).$$

Die andere Sorte ist erst im April 1883 bezogen worden (Obermaier in Nürnberg), hatte einen grossen specifischen Widerstand, 0,41, und den mittleren Temperaturcoefficienten bei 10° von nur 0,000 247.

Die Einrichtung der Widerstandsrollen war die folgende: Durch eine Holzbüchse, 15 cm hoch und 5 cm im Durchmesser, wurden die Electroden aus dickem Kupferdraht

geführt; dieselben wurden mit Guttapercha eingekittet und durch einen aufgeschraubten Holzdeckel festgehalten. Der untere Theil der Holzbüchse war hohl und auf einer längeren Strecke auf geringeren Umfang eingedreht. Auf die letztere Strecke wurden die Widerstandsdrähte bifilar aufgewickelt, nachdem sie in die unteren Enden der Kupferelectroden eingelöthet worden waren; die Stelle, an der der Draht geknickt wurde, ist mit einem Seidenfaden an ein kleines Messingschraubchen angebunden, welches in die Holzbüchse eingesetzt ist. Durch den Deckel der Büchse geht eine Durchbohrung, welche gestattet, ein Thermometer in das Innere der Widerstandsrolle einzuführen. Ueber das Ganze wird ein Glas übergekittet.

Der Electrodendraht ist ca. 3 mm dick; sein Widerstand beträgt pro Centimeter 0,00003 Q.-E. Auf den Electroden wird der Widerstand der Rollen durch Feilstriche abgegrenzt.

§ 19. Diese Widerstandsrollen wurden nur in Wasserbädern gebraucht; die letzteren besaßen folgende Gestalt:

Ein cylindrisches Gefäß aus Zinkblech von 10 cm Höhe und 18 cm Halbmesser, an Boden und Seiten mit Filz überzogen, war zur Aufnahme von 3 Widerstandsrollen bestimmt. Der Deckel dieses Gefäßes enthielt drei 5 cm weite Oeffnungen, durch welche die Widerstandsrollen hindurchgesteckt wurden, und besaß nach oben einen 4 cm hohen Rand, auf welchen ein zweiter Deckel aufgesetzt werden konnte; der Raum zwischen beiden Deckeln wurde, soweit er nicht von den oberen Enden der Widerstandsrollen und den Electroden in Anspruch genommen war, sorgfältig mit Filz ausgefüllt.

Durch die Mitte beider Deckel ging eine Durchbohrung, welche dazu diente, ein Thermometer in das Wasserbad einzuführen; den grossen Oeffnungen des unteren Deckels entsprachen kleinere Oeffnungen des oberen, welche erlaubten, auch in das Innere der Widerstandsrollen Thermometer zu bringen. Der Boden der Widerstandsbüchsen befand sich 2 cm hoch über dem Boden des Wasserbades. Die Stellen der Electroden, wo die Widerstände der Rollen durch Feilstriche begrenzt waren, befanden sich noch innerhalb des Filzdeckels, etwa 2—3 cm vom Rande entfernt; nur die

äussersten Enden der Electroden ragten aus der Umhüllung des Bades hervor.

Solche Bäder wurden nur verwendet, wenn das im Gefässe befindliche Wasser nahe die gleiche Temperatur hatte, wie die umgebende Luft. Die Widerstandsrollen wurden immer mehrere Stunden vor den Messungen in die Bäder gebracht. Die Temperatur des Wassers hielt sich sehr constant; sie änderte sich gelegentlich einmal in $\frac{3}{4}$ Stunden um $0,1^\circ$, meistens aber nur um wenige Hundertelgrade in derselben Zeit. Ich hielt es deshalb für erlaubt, die Temperatur im Inneren der Widerstandsrollen gleich der des umgebenden Wassers zu setzen, wenn die letztere nahe gleich der Lufttemperatur im Beobachtungsraume war.

§ 20. Die letztere Annahme ist nicht mehr gestattet, wenn die Temperatur des Bades von der der umgebenden Luft erheblich verschieden ist; die Temperatur der in dem Widerstandsgefäss eingeschlossenen Luft ist dann um einige Zehntelgrade von der des Bades verschieden, da die dicken Kupferdrähte einen erheblichen Wärmeaustausch zwischen dem Inneren der Gefässe und der umgebenden Luft vermitteln. Bei den Versuchen, welche ich in dieser Richtung anstellte, erhielt ich das Wasserbad halbe oder ganze Tage lang constant auf einer Temperatur, welche 10 bis 15° höher war, als die der umgebenden Luft; dabei blieb die Temperatur im Inneren der mit Luft oder Petroleum gefüllten Widerstandsbüchsen $0,3 - 0,7^\circ$ gegen die Temperatur des Bades zurück.

Will man Fehler dieser Art in der Temperaturbestimmung vermeiden, so dürfte es keineswegs zweckmässig sein, den Widerstandsrollen möglichst dicke Kupferelectroden zu geben; bei sehr dicken Drähten wird der Vortheil des grossen galvanischen Leitungsvermögens durch den Nachtheil des grossen Wärmeleitungsvermögens bedeutend überwogen.

Das Umgeben der Widerstandsdrähte mit Paraffin statt mit Luft wird keinen Vortheil bieten.

Sind die Temperaturen des Bades und der umgebenden Luft verschieden, so muss man die Widerstandsdrähte (wie bei den Siemens'schen Normalen) direct mit Flüssigkeit

(Petroleum) umgeben und die Temperatur dieser Flüssigkeit, nicht diejenige des äusseren Bades messen.

Dieses Verfahren habe ich bei Bestimmung der Temperaturcoefficienten eingeschlagen; die ausführliche Beschreibung desselben wird weiter unten folgen (§ 38).

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

X. Zur Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Schwingungsversuche; von D. Kreichgauer.

I. Verschiedene Arten der Bestimmung.

Das Trägheitsmoment eines beliebig geformten Körpers durch Rechnung genau zu ermitteln, ist nicht möglich; wohl aber kann dasselbe durch das Experiment mit ziemlicher Schärfe auf einem Wege bestimmt werden, den Poisson¹⁾ vorgeschlagen hat. Als Gauss²⁾ das Trägheitsmoment von Magneten zur Messung der Horizontalintensität des Erdmagnetismus verwendete, führte er jenen Vorschlag in der bekannten, noch gebräuchlichen Form aus, indem er einen Magnet einmal allein, dann mit zwei auf scharfen Spitzen ruhenden Massen von bekanntem Trägheitsmoment schwingen liess. Die Art der Belastung hat mit der Zeit verschiedene Aenderungen erfahren, die Massen wurden von Weber³⁾, statt sie auf Spitzen aufzusetzen, an Coconfäden gehängt, deren Abstand mit grösserer Genauigkeit und geringerer Mühe gemessen werden konnte, als die Entfernung zweier Spitzen.

Einige Beispiele älterer Bestimmungen nach dieser Methode mögen hier Platz finden.

W. Weber gibt in den Resultaten aus den Beobach-

1) Lamont, Handbuch des Erdmagnetismus. p. 75.

2) Gauss, Intensitas vis etc.

3) Weber, Resultate a. d. Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. p. 82.

tungen des magnetischen Vereins 1887, p. 82, das Trägheitsmoment eines Stabes, der bei der ersten Bestimmung an einem Seidenfaden, bei der zweiten an einem Metalldrahte von grosser Torsionskraft hing, an als:

1) 49 103 000 [mm² mg], 2) 49 004 000 [mm² mg],

während die Berechnung aus den Dimensionen den Werth 48 982 000 [mm² mg] lieferte. Die Schwingungsdauer des unbelasteten Stabes, auf gleiche Umstände reducirt, wird an derselben Stelle als Resultat aus 4 Beobachtungssätzen mitgetheilt; sie beträgt:

6,698 6,695 6,696 6,695 sec.

Der grösste Unterschied zwischen diesen Zahlen ist 3 auf 6700, oder 1 auf ca. 2230.

Nachdem zwei Cylindergewichte an Coconfäden an den Magnet gehängt waren, wurden aus 3 Sätzen die Schwingungsdauern gefunden:

12,058 12,039 12,019 sec.

mit der grössten Differenz von 39 auf 12040 oder 1 auf ca. 309. Gegenüber der guten Uebereinstimmung obiger 4 Werthe ist der Unterschied der drei letzteren ziemlich auffällig.

In der Schrift *Intensitas vis etc.* von Gauss findet sich ebenfalls ein Beispiel einer Trägheitsmomentbestimmung. Die Gewichte waren dort in vier verschiedenen Entfernungen nacheinander angehängt, in jeder der verschiedenen Stellungen wurde die Schwingungsdauer der Combination bestimmt, und mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate das Trägheitsmoment berechnet. Der gefundene Werth gestattete nun, rückwärts auszurechnen, wie gross die Schwingungsdauer bei den genannten 4 Stellungen hätte gefunden werden müssen. Das Resultat ist in der folgenden Tabelle enthalten:

Exper.	Tempus calculatum	Tempus observatum	Diff.
I	24,65894''	24,65717''	+0,00167''
II	20,78774	20,79228	-0,00454
III	17,69046	17,68610	+0,00436
IV	15,82805	15,82958	-0,00153

Ferner theilt Sartorius von Waltershausen in den Resultaten des magnetischen Vereins 1837, p. 99, eine ganz ähnliche Beobachtungsreihe mit, wie folgt:

Exper.	Berechnete Zeit in Sec.	Beobachtete Zeit in Sec.	Differenz Sec.	Gegenseitige Entfernung der Gew.
I	31,0169	31,0129	+0,0040	199,888 mm
II	25,6011	25,6317	-0,0306	150,0 "
III	20,8744	20,8493	+0,0311	100,0 "
IV	17,4347	17,4382	-0,0035	50,0 "

Auch Hansteen hat, wie er in den Resultaten von 1840 mittheilt, derartige Versuche angestellt, mit deren Ergebniss er gar nicht zufrieden war.

Da anzunehmen ist, dass nur gute Beobachtungen veröffentlicht wurden, so lässt sich aus den mitgetheilten Beispielen schliessen, dass einer oder mehrere principielle Fehler in der Methode liegen. Dieselben zu corrigiren oder zu umgehen, war der Hauptzweck gegenwärtiger Untersuchung.

Infolge der gemachten schlimmen Erfahrungen belastete Lamont¹⁾ und Gauss²⁾ den schwingenden Magnet mit einem Ringe, dessen Mittelpunkt in die Aufhängeaxe fiel. Dadurch trat nun an Stelle des vermiedenen ein neuer Missstand, die nicht controlirbaren Dichteverschiedenheiten und, da ausserdem der Ring meistens aus Messing bestand, der dieses Metall häufig begleitende Magnetismus. Eine grössere Beobachtungsreihe nach dieser Methode gibt Wild.³⁾ Für das Trägheitsmoment desselben Stabes, in längeren Intervallen bestimmt, sind dort die Zahlen angegeben:

71661	71632	71591	71524	71633	71632
71634	71653	71610	71596	71613	71617
71600	71577	71635	71600	71613	

Der grösste Unterschied zeigt sich zwischen dem ersten und vierten Werthe, er beträgt 137 auf 71660, oder 1 auf

1) Lamont, Abhandl. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. bair. Acad. 3. p. 621. 1843 u. Ueber das magnetische Observatorium an der K. Sternwarte bei München 1840.

2) Gauss, Resultate des magn. Vereins 1841, p. 26.

3) Wild, Erner's Rep. d. Physik. 20. 1884. p. 12.

523, aber auch die übrigen Zahlen stimmen nur unvollständig überein, was vielleicht auf eine Unsicherheit in der nicht leichten Orientirung, oder auf Magnetismus des Ringes hinweist. Da überdies das berechnete Trägheitsmoment des Ringes mit einem constanten Fehler behaftet sein könnte, so sind auch in dieser Methode noch nicht alle Schwierigkeiten überwunden. In demselben Aufsätze weist Wild noch auf die Nothwendigkeit weiterer Untersuchungen mit den Worten hin:

„Eine aufmerksame Betrachtung der bezüglichen Gauss'schen, sowie ähnlicher Beobachtungen von Sartorius v. Waltershausen lässt indessen erkennen, dass die Bestimmung für die intermediären Entfernungen auffallend viel grössere Abweichungen zwischen Berechnung und Beobachtung ergeben, als die aus den extremen Stellungen abgeleiteten. Wir lassen es dahingestellt, ob dies auf eine ungenügende Theorie dieser Methode, welche allfällige aerodynamische und Reibungscorrectionen, sowie eigene Schwingungen der angehängten Gewichte nicht berücksichtigt, zurückzuführen sei oder nicht, jedenfalls fordert aber dieser Umstand zu eingehenderen Untersuchungen dieser Methode auf.“

Eine andere schon von W. Weber gebrauchte Abänderung des Gauss'schen Verfahrens hat Dorn¹⁾ benutzt, welcher die Belastungscylinder auf Stifte feststeckt und die Schwingungsdauer der Combination bei zwei um 180° verschiedenen Stellungen der Belastung beobachtet. Auf die obere Fläche der Belastungscylinder ist je ein kleiner Kreis gezeichnet, dessen Mittelpunkt in der Umdrehungsaxe liegt. Gemessen wird der Abstand der auf der Centrale liegenden Punkte beider Kreise. Unter den bisher veröffentlichten Bestimmungen von Trägheitsmomenten geben die auf obigem Wege gefundenen Resultate Dorn die grösste Genauigkeit.

Eine von allen genannten verschiedene Methode beschreibt E. Brassine.²⁾

1) Dorn, Wied. Ann. 17. p. 773. 1882.

2) E. Brassine, Compt. rend. 95. p. 446. 1882. Beibl. 7. p. 156. 1883.

Im Gegensatze zu den früheren, bei denen Magnetismus oder Torsion als Directionskräfte dienen, wird hier die Schwerkraft benutzt. Ein leichtes Pendel ist am unteren Ende mit einer horizontalen Scheibe versehen und dient zur Aufstellung des Körpers, dessen Trägheitsmoment gemessen werden soll. Zu ermitteln sind dann folgende Stücke: die Masse des Pendels, die Lage seines Schwerpunktes, die Schwingungsdauer ohne und mit Belastung, die Masse des Versuchsgegenstandes, die Lage des Schwerpunktes in demselben und dessen Abstand von der Aufhängeaxe des Pendels. Von diesen werden die beiden letzten nur in seltenen Fällen und nur mit äusserster Vorsicht zu einer Genauigkeit gebracht werden können, welche die Sicherheit des Endresultates in gleichem Grade verbürgen, wie eine der anderen Methoden.

In der neuesten Zeit wurden die Bestimmungsarten durch eine von allen früheren ebenfalls principiell verschiedene Methode, die bifilare Methode¹⁾ von F. Kohlrausch vermehrt, welche den Zweck hat, die Unsicherheiten der Belastungsmethode zu umgehen. Zu bestimmen ist die Directionskraft einer weiten bifilaren Aufhängung, die Schwingungsdauer der Suspension mit und ohne Versuchsobject. Einen Magnet legt man in zwei um 180° verschiedenen Richtungen nacheinander ein.

Angaben über die Sicherheit der Ausmessung bifilarer Directionskräfte und die ganze Theorie der bifilaren Aufhängung finden sich in der Arbeit über die Bestimmung der Horizontalintensität.²⁾ Einen weiteren experimentellen Beitrag liefern die später (p. 300) beschriebenen Versuche, welche zugleich aufs neue die Vortheile der Methode gegenüber den früheren erkennen lassen.

In England ist noch eine andere Form der Trägheitsmomentbestimmung im Gebrauche, deren Resultate unter sich wohl übereinstimmen mögen, die aber zur Erlangung genauer Werthe wenig geeignet sein dürfte. Es wird, nachdem die Schwingungsdauer eines Magnets für sich bestimmt

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 22. p. 411. 1884 u. Gött. Nachr. 1883. p. 411.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 765. 1882.

ist, unter denselben ein Cylinder aus unmagnetischem Metalle horizontal und symmetrisch zur Schwingungsaxe aufgehängt und abermals die Schwingungsdauer gemessen. Da das Trägheitsmoment des Belastungs cylinders durch Rechnung gefunden werden kann, so wird dasjenige des Magnets mit den dazu gehörigen Theilen in bekannter Weise erhalten.

II. Störungsgründe.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Magnets nach der Gauss'schen Methode macht vier genaue Messungen erforderlich, eine Wägung, eine Abstandsmessung und zwei Schwingungsdauern. Die Sicherheit der Beobachtung von Schwingungsdauern ist leicht über die geforderte Grenze zu steigern, und der Fehler der Abstandsmessung kann durch sorgfältige Ausführung jedenfalls auch in den meisten Fällen bis zum nöthigen Betrage verringert werden. Obwohl aber gewiss alle Beobachter sämtliche Stücke mit erforderlicher Genauigkeit gemessen haben, weichen doch die extremen Werthe bis $\frac{1}{300}$ in vereinzelten Fällen noch mehr voneinander ab. Dass das nach dieser Methode bestimmte Trägheitsmoment im Mittel auch noch zu gross ausfiel¹⁾, beachtete man früher nicht, wahrscheinlich weil das Resultat fast nie in anderer Weise controlirt wurde. Als Prof. Kohlrausch²⁾, einen sehr genau cylindrisch gearbeiteten Stab untersuchte, dessen Trägheitsmoment auch aus der Form berechnete und es ausserdem durch seine Bifilarmethode bestimmte, machte er obige Bemerkung und veranlasste später diese Untersuchung.

Die Ursachen, welche das Trägheitsmoment zunächst ungenau zu machen geeignet sind, beeinflussen alle nur die Schwingungsdauer des belasteten Versuchsobjectes. Eine derselben hat Beling³⁾ in einer neueren Schrift untersucht und dann gezeigt, dass die davon herrührenden Störungen, bei kurz aufgehängten Gewichten, mittelst einer einfachen Formel berücksichtigt werden können. Die dort behandel-

1) Beispiel p. 274 oben.

2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. p. 411.

3) Beling, Zur Theorie der Bifilaraufhängung, Breslau 1891.

ten störenden Kräfte treten infolge der selbständigen Pendelschwingungen der aufgehängten Gewichte auf und sind um so grösser, je länger die Aufhängefäden sind. Rechnet man seine Formel, die für die Bewegung eines bifilar aufgehängten Systemes gilt, für den schwingenden Magnet oder das Torsionspendel um, so findet man, dass die beobachtete Schwingungsdauer T mit einem Factor zu multipliciren ist, um jene \mathfrak{I} zu erhalten, welche mit fest verbundenen Gewichten, also ohne Eigenbewegung derselben, gefunden werden würde.

Bedeutet:

D die Directionskraft,

m die Masse eines Belastungsgewichtes,

$2r$ den Abstand der beiden Gewichte,

λ die reducirte Pendellänge derselben,

g die Beschleunigung der Schwere,

A das Trägheitsmoment des Schwingungskörpers,

so ist:

$$\mathfrak{I} = T \left(1 - \frac{Dmr^2\lambda}{g(k + 2mr^2)} \right).$$

Am Schlusse seiner Arbeit stellt Beling in einer Tafel die Resultate seiner Experimentaluntersuchungen zusammen, wobei eine auffallende Erscheinung auftritt, deren Ursache aus den mitgetheilten Erläuterungen über Messinstrumente und Messmethoden nicht erklärt werden kann. Ein bifilar aufgehängter Körper von bekanntem Trägheitsmoment und bekannter Masse schwingt bei einer Directionskraft, deren Grösse aus den Dimensionen des Apparates berechnet wird. Aus den beobachteten Daten wird dann die Schwerebeschleunigung bestimmt. Der grösste Unterschied zwischen den 47 in Betracht kommenden Resultaten beträgt ca. 0,000 007 des ganzen, zwischen den letzten 20 nur 0,000 002 des ganzen, während der Abstand der beiden Aufhängefäden nur auf ca. 0,00025 des ganzen Abstandes (3,3 mm) bestimmt werden kann. Dadurch allein würde aber schon in der Grösse g eine Unsicherheit von 0,0005 derselben bedingt sein.

Ausser der besprochenen lassen sich noch 2 Störungsursachen nachweisen, von denen die eine wie die frühere in

der Befestigung der Gewichte, die andere aber in der Aufhängung des ganzen Systemes begründet ist. Die erstere soll auf mathematischem Wege berücksichtigt, die letztere auf praktischem möglichst beseitigt werden.

In der Formel, welche das Trägheitsmoment darstellt, wird jenes der Hilfsbelastung angenommen als bestehend aus der Masse derselben, multiplicirt mit dem Quadrate ihrer Entfernung, ausserdem vermehrt um das Trägheitsmoment der Gewichte, bezogen auf die verticale Axe durch ihren Aufhängepunkt. Dieser letztere Theil würde aber nur dann ganz hierher gehören, wenn die Gewichte sich vollständig mit dem Magnete drehen müssten, d. h. wenn die Directionskraft der Aufhängefäden unendlich gross wäre.¹⁾

Schwingungen combinirter Pendel.

Die Bewegung des Magnets mit den Gewichten kann dreifacher Art sein, von diesen ist eine bei den wirklich vorkommenden Verhältnissen ausgeschlossen und eine andere oft zu vermeiden.

Um die drei möglichen Arten von Bewegungen anschaulicher zu machen, wollen wir statt des Torsionspendels zunächst zwei gewöhnliche Pendel betrachten, von denen ein am unteren Ende des anderen hängt. Die Schwingungen solcher Pendel behandelt Daniel Bernoulli in dem Aufsatze: *Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae.*²⁾

1) Einen ganz ähnlichen Gegenstand behandelt der Aufsatz von Lübeck „Notiz zu den Bessel'schen Pendelversuchen“, Pogg. Ann. 150. p. 476. 1873, wo der Einfluss der in den Bessel'schen Pendeln eingeschlossenen Flüssigkeit auf die Schwingungen derselben untersucht und die von Bessel gefundenen unregelmässigen Resultate berichtigt werden.

2) D. Bernoulli, *Comm. Acad. sc. Petropolit.* 6. p. 108. 1738. — Ein besonderer Fall solcher Schwingungen hat schon Johann Bernoulli beschäftigt. *Comm. Petrop.* 3. p. 13. 1732. Später hat Euler die Bernoulli'sche Arbeit zweifach erweitert. *Comment. Petrop.* 8. p. 30. 1741: „De oscillationibus fili flexilis quocunque pondusculi onusti“, und *Acta acad. scient. imper. Petrop.* 3. 1779: „De motu oscillatorio mixto plurium pendulorum ex eodem corpore mobili suspensorum. Dasselbe Thema hat wieder Dumas in der Festschrift zur dritten

Erstens können beide Pendel gemeinsame Schwingungen von gleicher Dauer, aber ungleicher, von Masse und Länge derselben abhängiger Amplitude ausführen, wobei beide Pendel stets gleichzeitig die Ruhelage in gleicher Richtung passiren (I) Fig. 1. Die zweite Art unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass der Durchgang durch die Ruhelage wohl zu gleicher Zeit, aber in entgegengesetzter Richtung stattfindet (II). Fig. 2. Diese Bewegung hat stets eine kleinere Periode als die erste. Drittens können beide Pendel unregelmässig schwingen (III).



Fig. 1.

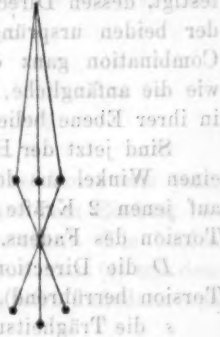


Fig. 2.

Den drei für gewöhnliche Pendel bestehenden Schwingungsformen ganz analoge lassen sich auch bei Torsionspendeln nachweisen, doch sind die Verhältnisse hierbei insofern allgemeiner, als zwei verschiedene Kräfte zu Direc-

Säcularfeier des Berliner Gymnasiums zum grauen Kloster aus anderen Principien behandelt und mehrfach ausgedehnt.

Anserdem findet sich noch dieser Stoff in Lagranges *mécanique analytique*, bei Minding, *Crelle's Journ.* 50. p. 243, 1855, bei E. Sang, *Proc. Edinb. Roy. Soc.* 1859—60, bei Jackwitz, die unendlich kleinen Schwingungen eines aus zwei Massenpunkten bestehenden Pendels (im Raume), *Progr. des Posener Gymnasiums* 1882, bei Luxemburg, Ueber das zweigliedrige Pendel (im Raume), *Zeitschr. f. Mathematik.* 28. p. 309. 1883 und bei Rézal.

tionskräften verwendet sind, und weil die Ausschläge hier nicht, wie dort, auf sehr kleine beschränkt bleiben.

a) Schwingungen ohne beschränkende Voraussetzungen. — Das Torsionspendel mit zwei an gleichen, unbiegsamen, aber tordirbaren Fäden angehängten gleichen Belastungen kann man zunächst zu einem zweigliedrigen vereinfachen, indem man z. B. die Belastungen in ihren Schwerpunkten concentrirt denkt, sie also des Trägheitsmomentes um ihre verticale Axe beraubt und dafür die die jetzt gewichtslos gedachten Massen derselben zusammen in der Aufhängeaxe des Hauptkörpers an einem Faden befestigt, dessen Directionskraft doppelt so gross ist, als jene der beiden ursprünglichen war. Dass die so abgeänderte Combination ganz dieselben Schwingungen machen muss, wie die anfängliche, folgt aus dem Satze, dass Kräftepaare in ihrer Ebene beliebig verschoben werden dürfen.

Sind jetzt der Hauptkörper und die Belastung um irgend einen Winkel aus der Gleichgewichtslage gedreht, so wirken auf jenen 2 Kräfte, seine eigene Directionskraft und die Torsion des Fadens. Bedeutet also:

D die Directionskraft (entweder magnetisch oder von Torsion herrührend),

s die Trägheitsmomentensumme der beiden Belastungen um ihre Axe,

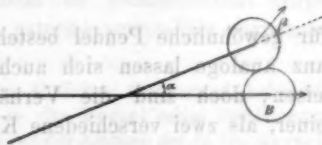


Fig. 3.

α den (für den Fall des Magnets kleinen) Winkel des Hauptkörpers gegen die Ruhelage, Fig. 3,

β den Winkel, um welchen die Belastung B gegen den Magnet gedreht ist,

θ die doppelte Directionskraft eines Aufhängefadens der Gewichte,

K das Trägheitsmoment des Hauptkörpers,

2) die Entfernung der beiden Aufhängefäden voneinander,

m die Massensumme beider Gewichte,

$$S = K + m l^2,$$

$$\varphi = \alpha + \beta,$$

so kann man, ähnlich wie Euler in der citirten Schrift (p. 280) zur Definition der Bewegung, die Gleichungen aufstellen:

$$(1) \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S} \alpha + \frac{\Theta}{S} \beta,$$

$$(2) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{\Theta}{s} \beta = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2}.$$

Schreibt man statt der zweiten Gleichung die Differenz von (2) und (1), so entstehen die folgenden:

$$(3) \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S} \alpha + \frac{\Theta}{S} \beta,$$

$$(4) \quad \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \frac{D}{S} \alpha - \Theta \beta \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s} \right).$$

Diese beiden Gleichungen haben dieselbe Form wie jene, welche die Bewegung eines Punktes unter dem Einfluss beliebig vieler Kräfte in der Ebene darstellen. Die beiden Gleichungen reduciren sich auf eine, wenn man (4) mit dem vorläufig unbestimmten Factor λ multiplicirt und dann von (3) subtrahirt.

$$(5) \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \lambda \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -\frac{D}{S} \alpha (1 + \lambda) + \Theta \beta \left[\frac{1}{S} + \lambda \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s} \right) \right].$$

Durch Substitution von $\alpha = z + \lambda \beta$ folgt hieraus:

$$(6) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{D}{S} (1 + \lambda) z + \beta \left[-\frac{D}{S} \lambda (1 + \lambda) + \Theta \left(\frac{1}{S} + \lambda \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{s} \right) \right) \right].$$

Die Grösse λ , über die noch frei verfügt werden kann, werde jetzt so bestimmt, dass der Factor von β in Gleichung (6) verschwindet. Aus dieser Gleichung entsteht so:

$$(7) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{D}{S} (1 + \lambda) z, \text{ mit der Lösung:}$$

$$(8) \quad z = A \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda)}} \sin \left[(t-B) \sqrt{\frac{D(1+\lambda)}{S}} \right] = \alpha - \lambda \beta.$$

Der Factor von β in (6) gleich 0 gesetzt, gibt 2 Werthe von λ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{Ds - \Theta(S+s)}{2Ds} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta Ds^2}{[Ds - \Theta(S+s)]^2}} \right].$$

Infolge der beiden Werthe λ_1 und λ_2 spaltet sich Gleichung (8) in zwei:

$$\begin{aligned} \alpha - \lambda_1 \beta &= A_1 \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_1)}} \sin \left[(t-B_1) \sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}} \right] \\ \alpha - \lambda_2 \beta &= A_2 \sqrt{\frac{S}{D(1+\lambda_2)}} \sin \left[(t-B_2) \sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}} \right]. \end{aligned}$$

Eliminirt man hier α und dann β , so entstehen die Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\frac{S}{D}} \left\{ \frac{A_1 \lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1}} \sin \left[(t-B_1) \sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}} \right] \right. \\ \quad \left. - \frac{A_2 \lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_2}} \sin \left[(t-B_2) \sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}} \right] \right\} \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\frac{S}{D}} \left\{ \frac{A_1}{\sqrt{1+\lambda_1}} \sin \left[(t-B_1) \sqrt{\frac{D(1+\lambda_1)}{S}} \right] \right. \\ \quad \left. - \frac{A_2}{\sqrt{1+\lambda_2}} \sin \left[(t-B_2) \sqrt{\frac{D(1+\lambda_2)}{S}} \right] \right\}. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen, welche im allgemeinsten Falle die Elongation des Hauptpendels und die der angehängten Gewichte für jeden Moment anzugeben gestatten, zeigen, dass von einer Schwingungsdauer im gewöhnlichen Sinne nicht die Rede sein kann. Die Bewegung der einzelnen Theile könnte verglichen werden mit jener einer aus 2 Wellen von verschiedener Länge zusammengesetzten Hauptwelle, deren graphische Darstellung die bekannte, oft fast regellos erscheinende Linie gibt. Nur wenn $\sqrt{1+\lambda_1}$ und $\sqrt{1+\lambda_2}$ commensurabel sind, entsteht in jedem Falle eine periodische Bewegung, weil dann nach einem gewissen constanten Zeitintervall beide der in (9) oder (10) enthaltenen Sinus wieder den gleichen Werth annehmen. Ertheilt man der Grösse Θ den Werth Null, so wird aus Gleichung (9):

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_1 S}{D}} \sin \left[(t - c_2) \sqrt{\frac{D}{S}} \right],$$

d. h. die Combination schwingt wie ein einfaches Torsionspendel mit dem Trägheitsmomente S .

Wächst Θ über alle Grenzen, dann entsteht aus (9) $\alpha = \sqrt{c_1(S+s)/D} \sin(t - c_2) \sqrt{D/S+s}$, das System schwingt

schwingt demnach wie ein Pendel mit dem Trägheitsmoment $K + m l^2 + s$.

Obgleich weder das Haupt- noch das Nebenpendel, wie die Betrachtung von α und β zeigt, eine Periode besitzen, so gibt es doch zwei Punkte in der Combination, die sich wie ein einfaches Pendel verhalten. Die beiden, entsprechend den 2 Werthen von λ , erhält man aus Gleichung (8). Da nämlich β den Winkel darstellt, um welchen eines der angehängten Gewichte gegen seine relative Ruhelage, also gegen die Richtung des Hauptkörpers gedreht ist, so gibt es auf dem Faden, an dem es hängt, oder auf dessen Verlängerung jedenfalls 2 Querschnitte, deren Drehung gegen jenen Körper $-\lambda\beta$ beträgt. Die unbegrenzte Verlängerung nach oben und unten wird dabei so gedacht, dass der ganze Faden gleichmässig und in allen Theilen gleich dem wirklich vorhandenen Stück tordirt ist. Da die Drehung der genannten ausgezeichneten Querschnitte gegen den Hauptschwingungskörper $-\lambda\beta$ ist, dieser selbst aber gegen die eigene Ruhelage um α abweicht, so sind die Querschnitte im ganzen um $\alpha - \lambda\beta$ gedreht, und dieser Ausdruck hat nach (8) eine gewöhnliche Sinusperiode.

Würde man in einem der bezeichneten Querschnitte einen Spiegel mit dem Faden verbinden, so erhielte man die Schwingungsdauer desselben:

$$(Gl. 8) \quad T' = \pi \sqrt{\frac{s}{D(1+\lambda)}},$$

ausserdem ist bekannt die Schwingungsdauer ohne Belastung:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

woraus K durch Elimination von D mittelst einer quadratischen Gleichung berechnet werden kann.

Leichter lässt sich dieselbe Erscheinung bei zwei combinirten ebenen Pendeln verfolgen. Auch hier besteht, wie man aus einer der p. 280 citirten Schriften, z. B. der von Dumas, ersehen kann, zwischen dem Winkel des Hauptpendels α (Fig. 3) und dem des Nebenpendels gegen das Hauptpendel β eine Beziehung von der Form:

$$\alpha + m_1 \beta = m_2 \sin m_3 t,$$

wenn m_1 bis m_3 Constante sind. In Fig. 4 sei AC zu irgend einer Zeit die Lage des Hauptpendels, FC für denselben Augenblick die Richtung des angehängten Pendels, $\angle CAD = \alpha$, $\angle BCE = \beta$,
 $\angle BAD = \alpha + m_1 \beta$, $\angle BAC = m_1 \beta$.

In dem Dreieck ABC verhält sich dann:

$$BC : AC = \sin m_1 \beta : \sin (\beta - m_1 \beta)$$

oder für kleine Winkel β :

$$BC : AC = m_1 : 1 - m_1,$$

d. h. BC ist eine Constante, da sämtliche anderen Glieder der Proportion ebenfalls Constante sind; dies gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt während der Schwingungen. Daraus folgt, dass die Linie AB immer denselben Punkt in der Richtung des Nebenpendels CF trifft, und da AB nach obiger Gleichung Sinusperioden hat, so hat auch die Bewegung des Schnittpunktes B solche. Der Punkt B kann bei passender Wahl der Dimensionen beider Pendel natürlich auch zwischen C und F fallen.

b) Regelmässige Schwingungen. — Der Unterschied dieser gegen die unregelmässigen besteht, wie aus p. 281 ersichtlich ist, darin, dass beide Pendel stets gleichzeitig die Ruhelage passiren. Es muss demnach zwischen den Winkeln der beiden gegen die Ruhelage α und β eine Beziehung bestehen, welche diese Bedingung enthält und zugleich den beiden Gleichungen (3) und (4) nicht widerspricht. Die einfachste derartige Beziehung ist $\beta = c\alpha$, wo c eine vorläufig unbestimmte Constante ist.

Die Bewegung wird jetzt durch die 3 Gleichungen bestimmt:

$$(a) \quad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{D}{S} \alpha + \frac{\Theta}{S} \beta$$

$$(b) \quad \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \frac{D}{S} \alpha - \Theta \beta \left[\frac{1}{S} + \frac{1}{s} \right], \quad (c) \quad \beta = c\alpha.$$

Die erste und letzte Gleichung liefern die Beziehung:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \alpha \left[-\frac{D}{S} + \frac{c\Theta}{S} \right]$$

mit der Lösung:

$$(d) \quad \alpha = \sqrt{\frac{n_1 s}{D - c \theta}} \sin \left[(t - n_2) \sqrt{\frac{D - c \theta}{s}} \right],$$

n_1 und n_2 sind Integrationsconstanten.

Die vorläufig unbestimmte Grösse c folgt aus den Gleichungen (a), (b) und (c) durch Elimination von α und β als:

$$(e) \quad c = \frac{Ds - \theta(S + s)}{2\theta s} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\theta Ds^2}{[Ds - \theta(S + s)]^2}} \right].$$

Die Constante c ist zugleich das Verhältniss der Ausschlagsweiten beider Pendel. Durch Vergleichung derselben mit der Constanten λ p. 284 folgt:

$$(f) \quad c\theta = -\lambda D.$$

Die Dauer der regelmässigen Schwingungen erhält man aus Gleichung (d), sie ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{s}{D - c\theta}}.$$

Ersetzt man hierin $c\theta$ der Gleichung (f) gemäss durch $-\lambda D$, so geht die Beziehung für die Dauer der regelmässigen Schwingungen in jene für die ausgezeichneten Punkte bei unregelmässigen (p. 285) über. Daraus geht hervor, dass die beiden Punkte unter allen Umständen eine constante Schwingungsdauer besitzen.

Ebenso wie auf p. 285 könnte jetzt das Trägheitsmoment K des Hauptpendels einer beliebig gegebenen Combination aus regelmässigen Schwingungen gefunden werden.

c) Dreigliedriges Pendel. — Bisher war stets vorausgesetzt, dass die beiden an das Hauptpendel angehängten Gewichte gleiche Schwingungsdauer um ihre Axe besitzen, und infolge dessen konnten sie als ein einziges betrachtet werden. In praktischen Fällen ist diese Gleichheit der Schwingungsdauern nur schwer erfüllbar, und es ist deshalb von grossem Vortheil, dass auch ohne dieselbe alles Frühere Geltung hat, wenn man nur aus den beiden Torsionsdirectionskräften der Aufhängefäden das arithmetische Mittel nimmt. Aus den 3 Differentialgleichungen für das dreigliedrige Pendel kann dieses in einfacher Weise geprüft werden. Insbesondere ist sofort ersichtlich, dass ungleiche

Schwingungsdauern der beiden Gewichte um ihre Axe unmöglich die Aufhängeaxe des Magnets aus ihrer Lage bringen können, da jedes Drehungsmoment für sich allein schon ein Kräftepaar und zwar unter allen Umständen nur ein solches bedingt.

Nicht so einfach ist die Sachlage für die gewöhnlichen Pendelschwingungen der angehängten Gewichte, welche Belling (s. p. 278) behandelt hat, indem verschiedene Schwingungsdauern derselben hier zu bedeutenden Störungen Veranlassung geben können, so lange die Drehungsaxe des Hauptschwingungskörpers nicht unveränderlich gemacht wird. Solche Schwingungen sind die zweite der auf p. 279 erwähnten Hauptursachen fehlerhafter Bestimmungen des Trägheitsmomentes, indem sie nicht nur direct die Schwingungsdauer beeinflussen, sondern auch den Schwerpunkt des Magnets hin und her stossen. Es ist auch hierdurch besonders die Erscheinung zu erklären, dass unter Beibehaltung der gleichen Verhältnisse verschiedene Schwingungsdauern erhalten werden, insbesondere, wenn man zwischen 2 Beobachtungssätzen den Magnet beruhigt und ihn dann von neuem, etwas rascher oder langsamer wie vorher, wieder anstösst. Warum der Schwerpunkt mit bewegt wird, ist in dem Falle leicht zu sehen, wo die Pendelschwingungen der Gewichte, auch bei Aufhängung an gleichlangen Fäden, unregelmässig ausgeführt werden. In diesem Falle greifen ja nicht mehr Kräftepaare an dem Magnet an, sondern den unregelmässigen, selbständigen Schwingungen entsprechend greifen an beiden Enden des Magnets in jedem Augenblicke von einander unabhängige verschiedene und verschieden gerichtete Kräfte an, die sich immer in ein Kräftepaar und eine einseitig angreifende Kraft zerlegen lassen. Ungleiches Gewicht der beiden angehängten Massen, sowie ungleicher Abstand vom Aufhängepunkte vergrössern das Uebel. Haben die Aufhängefäden auch noch ungleiche Länge, so treten die einseitigen Kräfte in jedem Falle auf, auch bei einer der mit I und II p. 281 bezeichneten Schwingungsformen. Aus den Resultaten der Untersuchungen Euler's (p. 280) geht nämlich hervor, dass die Amplituden zweier ungleich langer,

an demselben Punkte des Hauptpendels befestigten Nebenpendel von gleicher Masse ungleich sind. Auch aus der regelmässigen Schwingungsart dreier Pendel lässt sich durch einfache Schlüsse dieselbe Thatsache folgern. Haben aber beide angehängte Gewichte verschiedene reducirte Pendellängen, folglich verschiedene Amplituden, so können die auftretenden Kräfte wieder kein reines Kräftepaar bilden. Die Störungen wären natürlich am grössten, wenn man einem der Gewichte die Pendellänge Null, dem anderen eine endliche zutheilen würde.

III. Vereinfachung der Gleichungen durch passend gewählte Verhältnisse.

a) Unregelmässige Schwingungen. — Bestimmt man das Trägheitsmoment eines Magnets, so kann das der angehängten Cylinder um ihre Axe (s) immer bedeutend kleiner gemacht werden, als die Summe S , und auch die Regulirung der Torsionskraft Θ bietet keine Schwierigkeiten. Bei passender Wahl dieser Grössen werden sowohl Beobachtung als Rechnung bedeutend einfacher. Während aus Gleichung (9) im allgemeinen Falle eine einigermaßen leicht beobachtbare Schwingungsdauer gar nicht erhalten werden konnte, ist dieselbe für ein kleines λ_1 oder λ_2 äusserst einfach. Ist z. B. λ_1 gegen λ_2 klein, was durch die Kleinheit des Ausdruckes $\Theta D s^2 / [D s - \Theta(S + s)]^2$ (p. 284) bedingt ist, so hat der zweite Sinus in Gleichung (9) entsprechend einen kleinen Einfluss auf die Periode von α . Die beobachtete mittlere Schwingungsdauer T' des Magnets kann man deshalb gleichsetzen:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{S}{D(1 + \lambda_1)}} = \pi \sqrt{\frac{K + m l^2}{D(1 + \lambda_1)}}.$$

Die Schwingungsdauer ohne Belastung ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

aus diesen beiden findet man durch Eliminiren von D :

$$(13) \quad K = m l^2 \frac{T^2}{T'^2(1 + \lambda_1) - T^2},$$

oder angenähert, wenn $ml^2 + s = k$:

$$K = (ml^2 - \lambda_1 S) \frac{T^2}{T^2 - T^1} = (k - \lambda_1 S - s) \frac{T^2}{T^2 - T^1}.$$

Wird die Torsionskraft $\Theta = 0$, so wird auch $\lambda_1 = 0$ und $K = ml^2 T^2 / (T^2 - T^1)$, worin das Trägheitsmoment der Gewichte um ihre Axe (s) ganz fehlt.

Sind Θ und D nicht sehr viel voneinander verschieden, so genügt schon zu demselben Zwecke, dass s/S eine kleine Grösse ist. Für beide bezeichneten Fälle wird auch der allgemeine Ausdruck für λ_1 zur Ausrechnung bequemer, indem angenähert entsteht:

$$\lambda_1 = \frac{\Theta s}{Ds - \Theta(S + s)}.$$

Diese Form von λ_1 , sowie die Gleichung (13) sind bei der Berechnung der angestellten Versuche benutzt worden.

b) Regelmässige Schwingungen (p. 286). — Dieselben entstehen, wenn man den Ablenkungen α und β von Haupt- und Nebenpendel das Verhältniss 1:c ertheilt, beruhigt und von dieser Lage aus die Bewegung beginnen lässt. Da dieses für die Combination, wie sie zur Bestimmung von Trägheitsmomenten dient, kaum auszuführen ist, so scheint es, als ob diese Schwingungsform für solche Messungen keine Bedeutung hätte. Doch hat schon Daniel Bernoulli die Bemerkung gemacht, dass regelmässige Schwingungen auch entstehen — jedenfalls nur infolge der Reibung an den Aufhängepunkten und in der Luft —, wenn die dazunöthwendigen Bedingungen nur annähernd erfüllt sind. Dass das Gleiche auch von Torsionspendeln gilt, davon habe ich mich durch Versuche überzeugt.

Bei der zu Trägheitsmomentbestimmungen gebräuchlichen Pendelcombination ist es nun oft ohne viele Vorbereitungen möglich, die Bedingungen regelmässiger Schwingungen annähernd zu erfüllen, nämlich immer dann, wenn das Verhältniss der Ausschläge des zweiten Pendels zum ersten c:

$$c = \frac{-\Theta(S + s) + Ds}{2\Theta s} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\Theta Ds^2}{[Ds - \Theta(S + s)]^2}} \right]$$

recht klein ist. In diesem Falle ist es hinreichend, nur das Hauptpendel abzulenken und nach Beruhigung des Ganzen wieder loszulassen.

Wie früher λ , so wird auch hier c sich einfacher darstellen, wenn $4\Theta Ds^2/[Ds - \Theta(S+s)]^2 = \delta$ eine kleine Zahl wird:

$$c_1 = \frac{-Ds}{Ds - \Theta(S+s)}; \quad c_2 = \frac{-\Theta(S+s) + Ds}{\Theta s} \left[1 + \frac{\Theta Ds^2}{[\Theta(S+s) - Ds]^2} \right].$$

Sind Θ und D nicht viel verschieden, so wird für kleines s/S sowohl δ als c_1 eine kleine Zahl.

Das Trägheitsmoment des Hauptpendels findet sich hier, wie auch sonst immer, aus den beiden Gleichungen für die Schwingungsdauer mit und ohne Belastung:

$$T = \pi \sqrt{\frac{S}{D - c_1 \Theta}} \quad \text{und} \quad T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}},$$

durch Eliminierung von D , unter Berücksichtigung der Beziehung $S = K + m l^2$ als:

$$(14) \quad K = m l^2 \frac{T^2}{T^2 \left(1 - c_1 \frac{\Theta}{D} \right) - T^2};$$

näherungsweise findet man auch die Beziehung:

$$K = [m l^2 + s(1 + c_1)] \frac{T^2}{T^2 - T^2} = (k + c_1 s) \frac{T^2}{T^2 - T^2}.$$

Die zur Berechnung von c_1 dienende Grösse S braucht natürlich nicht genau bekannt zu sein.

IV. Versuche.

Gegenstand der vielfachen Versuche waren zwei möglichst sorgfältig cylindrisch abgedrehte Magnete,

deren Länge . . . 16,009 cm und 20,006 cm

„ Durchmesser 1,48 „ „ 1,52 „

„ Masse . . . 216,13 g „ 279,96 g

betrug. Ihr magnetisches Moment war im Mittel:

5000 [cm, g] und 7240 [cm, g].

Der Umfang des längeren Stabes wurde an vier gleichweit voneinander entfernten Stellen mittelst eines sehr dünnen Drahtes gemessen, welcher zehnmal um den Magnet geführt war. Dadurch wurde gefunden, dass der Durchmesser desselben vom Südpol gegen den Nordpol wächst, und zwar von der ersten zur zweiten Messstelle um 0,0021 cm, von der zweiten zur dritten um 0,0016 cm, von der dritten zur vierten um 0,0054 cm. Der kürzere Stab war vor einem Jahre nach den Vorschriften von Strouhal und Barus magnetisirt, der längere kurz vor seiner Verwendung in gleicher Weise. Durch die in der Mitte durchbohrten Magnete wurde ein Kupferstift gesteckt, der an einem 265 cm langen, 0,010 cm dicken harten Messingdraht mit dem Torsionscoëfficienten 0,002 angelöthet war.

Die 3 Paare der zur Belastung dienenden Kupfergewichte waren Cylinder:

Nr.	Masse <i>m</i>	Radius <i>ρ</i>	Höhe	Trägheitsm. $\frac{1}{2} m \rho^2$
I	98,135 g	0,692 cm	3,7 cm	23,5 [cm, g]
II	200,437 „	0,692 „	7,5 „	48,0
III	193,105 „	0,945 „	3,8 „	86,2

Da verarbeitetes eisenfreies Kupfer bis vor kurzem ziemlich selten war, so wurden die sechs Belastungscylinder auch auf Magnetismus geprüft. Als ein zu solchen Prüfungen vorzüglich geeignetes Instrument wurde das transportable Intensitäts-Bifilarvariometer¹⁾ benutzt, indem ein Magnetende dem vorderen Glasverschluss durch Drehung am Torsionskopfe möglichst genähert, und dann der zu prüfende Körper von aussen bis zum Glase geschoben wurde; dabei ändern die meisten Körper die Einstellung des Magnets. Es gaben die beiden Cylinder I diamagnetische Ablenkung von 0,2 Scalentheilen, die Gewichte II magnetische von 4,4 Scalentheilen, die Gewichte III magnetische von 4 Scalentheilen, während 1 mg Eisen von etwa 1 mm Länge aus derselben Entfernung den Magnet um 800 Sca-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 533. 1882.

lentheile ablenkte. Um auch noch das Moment des in den Kupfergewichten während der Trägheitsmomentbestimmung inducirten Magnetismus kennen zu lernen, wurde auf Vorschlag von Prof. Kohlrausch eine Methode benutzt, die hier wie bei ähnlichen Zwecken vollständig zum Ziele führt. Eine Magnetnadel wurde durch einen Ablenkungsstab und durch denjenigen Magnet, dessen Trägheitsmoment mittelst der Gewichte gemessen war, senkrecht zum magnetischen Meridian abgelenkt. Darauf wurden die Gewichte II in einem Abstände von 14 cm von der Nadel ungefähr in die Lage gebracht, die sie während der Schwingungsbeobachtungen bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes einnehmen. Die Nadel änderte dadurch ihre Einstellung um ungefähr 0,1 Scalentheile, indessen ein Stab mit dem Magnetismus 5000 [cm g] aus 1 m Entfernung um 70 Scalentheile ablenkte. Daraus lässt sich das magnetische Moment eines Gewichtes auf 0,02, beider Gewichte zusammen von 0,04 [cm, g] schätzen, ein Betrag, der auf die letzte berechnete Stelle des Trägheitsmomentes keinen Einfluss mehr hat. Die Kupfercylinder wurden mittelst verschieden dicker (0,06 bis 0,18 mm) weicher Messingdrähte an den Magnet gehängt, über dessen Enden zur Verhütung des Anstreichens der Drähte vorspringende leichte Kupferkappen steckten.

Der Abstand beider Fäden wurde durch einen Comparator mit zwei Mikroskopen ermittelt. Die beiden letzteren besaßen ca. 0,1 mm Theilungen, und wurden auf die Fäden mit bestimmten Strichen eingestellt, deren Abstand nachher durch Visiren nach einem Normalmeter gemessen wurde.

Genauigkeitsgrenzen. Trägheitsmomente von Magneten werden meistens zum Zwecke der Messung der erdmagnetischen Horizontalintensität gesucht. Will man diese letztere, wie manche beabsichtigen, bis auf $\pm 0,0001$ des ganzen Werthes (ungefähr den Betrag, welcher im Durchschnitt bei Bifilarvariometern als Scalenwerth verwendet wird), genau kennen, so darf das Trägheitsmoment des schwingenden Stabes höchstens $\pm 0,0002$ Fehler besitzen. Dieses Trägheitsmoment wird nun erhalten aus der Gleichung:

$$K = k \frac{t^2}{t'^2 - t^2},$$

t ist die Schwingungsdauer des Magnets allein,
 k das hinzugefügte Trägheitsmoment,
 t' die Schwingungsdauer nach Vermehrung des Trägheitsmoments.

$$k = m(l^2 + \frac{1}{2}r^2),$$

m die Masse beider Belastungscylinder zusammen,
 l deren halber Abstand,
 r deren Radius.

$\log K = \log k + \log t^2 - \log(t'^2 - t^2)$, durch Differentiren:

$$\frac{dK}{K} = \frac{dk}{k} + 2 \frac{dt}{t} \frac{t'^2}{t'^2 - t^2} - 2 \frac{dt'}{t'} \frac{t'^2}{t'^2 - t^2}.$$

Ist noch r klein gegen l , und $(dm/m) = 0$, so wird nahezu:

$$\frac{dK}{K} = 2 \frac{dl}{l} + 2 \frac{dt}{t} \frac{t'^2}{t'^2 - t^2} - 2 \frac{dt'}{t'} \frac{t'^2}{t'^2 - t^2}.$$

Bei den beiden in Frage kommenden Magneten war die Grösse $2t'^2/(t'^2 - t^2)$ zwischen 2,7 und 3,9. Aus einigen Probebeobachtungen kann dt/t und dt'/t' auf etwa $\pm 0,00003$, und dl/l auf $\pm 0,00005$ geschätzt werden, wenn dl , dt und dt' die Fehler von l , t und t' bezeichnen. Daraus ergibt sich das Verhältniss des wahrscheinlichen Fehlers von K zu K selbst:

$\pm 0,00015$ im günstigeren Falle, und

$\pm 0,00019$ im ungünstigeren Falle (für $2 \frac{t'^2}{t'^2 - t^2} = 3,9$).

Ausschliessung einiger möglichen Störungursachen. Da nach Beseitigung der bis auf p. 288 und 289 besprochenen Fehlerquellen durch Aufhängung der Gewichte an Drähte von grosser Torsionskraft und Berücksichtigung der selbständigen Schwingungen derselben sowohl um ihre Axe, als auch um den Aufhängepunkt, die Unterschiede der einzelnen Werthe grösser blieben, als erwartet worden war, so wurden mögliche störende Einflüsse für sich untersucht.

Luftstörungen. Um zu entscheiden, ob die niemals ganz zu vermeidenden Luftströmungen die Schwingungsdauer merkbar beeinflussen, liess man den unbelasteten Magnet bei

geschlossenem und dann bei ganz offenem Kasten schwingen. Die beiden wiederholt erhaltenen Resultate waren aber nur um die gewöhnlichen Beobachtungsfehler verschieden. Versuche über den Einfluss von Luftströmungen auf einen schwingenden Körper wurden in neuerer Zeit von Braun¹⁾ angestellt. Die durch den Schwingungskörper verdrängte Luft hat nur bei Schwingungen in nicht horizontaler Ebene einen Einfluss, die durch denselben mitbewegte Luft müsste durch besondere Versuche, wie Bessel in seinem Werke über das Secundenpendel gezeigt hat, eliminirt werden. In den meisten Fällen von Trägheitsmomentbestimmungen, besonders von Magneten, ist der davon herkommende Einfluss wegen der geringen Ausdehnung und der kleinen Geschwindigkeit jedenfalls sehr gering, wie auch aus den Versuchen von E. Bödeker²⁾ hervorgeht. Lamont³⁾ schliesst aus Beobachtungen, die er gemeinsam mit Kuhn gemacht, dass eine Luftschicht von 4 mm Dicke an dem Magnet hängend gedacht werden müsse. In neuester Zeit hat noch Baille⁴⁾ sich mit dem Einfluss der Luft, — deren Temperatur und Druck variirt wurde — auf einen schwingenden Körper beschäftigt.

Bei den hier mitgetheilten Versuchen wurde der Einfluss der Luft vernachlässigt, da derselbe nicht durch spezielle Untersuchung nachgewiesen ward, und da aus den Versuchen Bödeker's auf die Geringfügigkeit desselben geschlossen werden kann.

Logarithmisches Decrement. Ebenso wenig konnte ungleichmässig sich ändernde Dämpfung Störungen von dem erhaltenen Betrage verursachen, indem die vielen, auf längere Zeit ausgedehnten Versuche das logarithmische Decrement des unbelasteten Magnets fast constant erscheinen liessen (0,00040 bis 0,00043). Viel grössere Unterschiede zeigte es aber bei den Schwingungen mit Belastung sowohl innerhalb

1) Braun, Exner's Repert. d. Physik. 20. p. 821. 1884.

2) E. Bödeker, Versuche zur Bestimmung des Luftwiderstandes bei kleinen Geschwindigkeiten. Göttingen 1881.

3) Lamont, Pogg. Ann. 71. p. 124. 1847.

4) Baille, Compt. rend. 96. p. 1493. 1883.

derselben Beobachtungsreihe, als auch besonders von einer zur anderen. Die einzelnen Bestimmungen mit Gewichten II gaben Werthe zwischen 0,00068 bis 0,00086, mit Gewichten I von 0,00052 bis 0,00065.

Von Interesse sind noch die Erscheinungen, die dann auftreten, wenn die Belastungscylinder ungefähr gleiche eigene Schwingungsdauer um ihre Axe besitzen, wie der belastete Magnet. z. B. wurde mit Gewichten III als logarithmisches Decrement gefunden 0,0035 bis 0,0008, während die Schwingungsdauer von kleineren zu grösseren Werthen anstieg:

Aus 23 Schwingungen	13,100 Sec.
" 28 folg. "	13,136 "
" 28 " "	13,154 "
" 28 " "	13,170 "
" 64 " "	13,179 "

Bei diesem Versuche war der Magnet, um ihn in Bewegung zu setzen, durch einen zu ihm senkrechten Stab abgelenkt, dann beruhigt und plötzlich losgelassen worden.

Electricität. Hängen die Gewichte an Seidenfäden, so wäre es nicht unmöglich, dass dieselben während der Bewegung electricisch werden und infolge dessen die Schwingungsdauer beeinflussten, aber auch hier ergab die Untersuchung ein negatives Resultat.

Inconstanz des Stabmagnetismus. Da möglicherweise der Magnetismus des Schwingungsstabes während der mit ihm vorgenommenen Manipulationen etwas variabel sein könnte, besonders wenn er, wie hier, längere Zeit im magnetischen Meridian hängt, und dadurch eine kleine Verstärkung durch Induction erfahren konnte, so ward die Constanz auf zweierlei Weise geprüft. Einmal lenkte der gut befestigte Magnet aus grosser Nähe die Nadel eines Magnetometers ab, während er durch schwache Schläge erschüttelt wurde. Dabei blieb die Nadeleinstellung constant. Nachdem der Stab wieder mehrere Tage die Richtung des Meridians hatte, ward seine Schwingungsdauer gemessen und nach einigen kleinen Stössen abermals. Für die gleiche Anzahl Schwingungen, auf gleiche Verhältnisse reducirt, ergaben sich

die Zeiten: 1758,45 und 1758,50 Sec. Die Constanz lässt nichts zu wünschen übrig.

1) Trägheitsmoment des kleinen Magnets.

a) Gauss'sche Methode. Die Messungen wurden mit allen von Gauss angegebenen und von Goldschmidt¹⁾ mitgetheilten Vorsichtsmaassregeln ausgeführt. Die Intensitätsvariationen gab das transportable Bifilarvariometer (p. 292), die Schwankungen des Stabmagnetismus mit der Temperatur wurden aus dem Temperaturcoefficienten berechnet, der für den kleinen, resp. grossen Stab 0,00050 und 0,00045 beträgt.

Die Gewichte waren, um einen grossen Werth von Θ und darum geringe Correction zu erzielen, an (weichen) Messingdraht von 0,007 bis 0,018 cm Dicke aufgehängt. Das Trägheitsmoment wurde aus Gleichung (13) p. 289 und (14) p. 291 berechnet, da die Constante λ_1 sehr klein war.

Tabelle 1.

Versuche mit Gewichten an Metalldrähten.

ρ (cm)	t' (sec)	t (sec)	k [cm, g]	K [cm, g]	d	δ	l (cm)	Drahtdicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
8,040	10,5107	6,8752	6367,9	4671,0	-1,2	+1,5	2,0	0,007	1,0	I
8,036	10,5216	6,8867	6361,0	4677,5	+5,3	1,5	2,1	0,007	1,0	I
8,0567	10,6228	6,9399	6394,7	4671,1	1,1	1,4	3,2	0,018	0,4	I
8,0647	10,6190	6,9378	6390,9	4668,5	-3,7	1,3	2,1	0,013	0,5	I
8,0702	13,4357	6,9354	13103,0	4673,6	+1,4	1,3	3,0	0,018	0,5	II
8,0651	10,6170	6,9361	6392,4	4673,8	+1,6	1,4	3,2	0,013	0,8	I
8,0498	13,4007	6,9314	13036,2	4670,9	-1,3	1,4	3,2	0,018	1,0	II
8,0610	10,6137	6,9377	6392,9	4671,9	-0,3	1,3	2,8	0,013	0,6	I
8,0472	13,4140	6,9397	13027,0	4669,9	-2,3	1,5	3,3	0,013	0,9	II
8,0710	10,6314	6,9408	6416,6	4675,1	+2,9	1,4	2,8	0,013	0,7	I
8,0468	13,4104	6,9384	13027,6	4670,9	-1,3	1,4	2,8	0,013	1,0	II
Mittelwerth				4762,20						

In der vorstehenden Tab. 1 ist

r der halbe gemessene Abstand der beiden Drähte, an denen die Gewichte hingen,

t' die Schwingungsdauer mit Belastung,

t die Schwingungsdauer ohne Belastung.

K das corrigirte Trägheitsmoment des Magnets mit Aufhängestift und Spiegel nach Abzug der Kappen [92,6] p. 293.

1) Goldschmidt, Resultate des magnet. Vereins 1840. p. 131.

δ die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente K und dem aus der gebräuchlichen Rechnungsform hervorgehenden,
 d die Abweichung vom Mittelwerthe,
 l die Länge des Aufhängedrahtes beider Gewichte,
 T die Schwingungsdauer der Gewichte um ihre Axe.
 k p. 294.

Zur besseren Erkenntniss der aus Abänderung verschiedener Bestimmungsmittel hervorgehenden Gesetzmässigkeiten werden die Mittelwerthe gebildet:

		Trägheitsmoment
		Magnet allein
Gewichte I	. . .	4672,40
" II	. . .	4671,03
Draht 0,018 cm	. . .	4672,05
" 0,013 "	. . .	4671,27
" 0,007 "	. . .	4673,95

Versuche mit Gewichten an Seidenfäden. Eine Messung wurde mit an Seidenfäden hängenden Gewichten ausgeführt und gab:

r	l'	l	K'	K	l cm	T	Nr. der Gewichte
8,0336	13,1939	6,9360	4701,0	4671,6	3,0	33	III

K' ist nach der gewöhnlichen Formel ohne Correction (p. 294) berechnet, in K ist der Einfluss der Torsion der Seidenfäden corrigirt.

Der Unterschied zwischen dem uncorrigirten Werthe und denen von Tab. 1 (ungefähr $\frac{1}{200}$ des Ganzen) zeigt zur Genüge, welch grossen Betrag die Correction bei Aufhängung an Seidenfäden in vielen Fällen erreichen kann. Dass in obiger Bestimmung bei Verwendung von 3 cm langen Seidenfäden der corrigirte Werth dem wahren so sehr nahe kommt, dürfte Zufall sein.

Kurze Aufhängung der Gewichte an Metalldrähten. Um den Einfluss der zweifachen selbständigen Schwingungen noch mehr zurückzudrängen, wurden die freien Längen der Aufhängedrähte durch Entfernung der auf dem

Magnete sitzenden Kappen verkürzt. Statt dieser wurden zwischen das Ende des Magnets und den Draht kleine Messingkeile eingeschoben, deren Trägheitsmoment wegen ihrer Kleinheit leicht mit mehr als genügender Genauigkeit berechnet werden konnte. Die Resultate der folgenden Tab. 2 sind mittelst solcher Keile erhalten. Die Buchstaben haben die Bedeutung von Tab. 1.

Tabelle 2.

r [cm]	t' [sec]	t [sec]	k [cm, g]	K [cm, g]	d	δ	l [cm]	Draht- dicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
8,1394	13,4977	6,8721	13333,6	4667,4	-3,0	1,1	1,0	0,013	0,6	II
8,0968	13,4393	6,8700	13191,2	4667,6	-2,8	1,0	1,3	0,010	0,5	II
8,0896	10,5994	6,8696	6448,7	4671,8	+1,4	0,9	1,3	0,010	0,6	I
8,1052	13,4635	6,8773	13219,1	4668,1	-2,3	1,1	1,4	0,013	0,5	II
8,1040	13,4652	6,8794	13215,5	4669,1	-1,3	1,1	1,5	0,013	0,5	II
8,0891	10,6047	6,8734	6447,8	4672,0	+1,6	0,9	1,2	0,010	0,6	I
8,0940	10,6038	6,8704	6455,8	4672,1	+1,7	0,9	1,2	0,010	0,6	I
8,1381	13,4960	6,8741	13242,7	4670,7	+0,3	1,1	1,2	0,010	0,6	II
8,1140	10,6373	6,8825	6490,1	4674,1	+3,7	0,8	1,1	0,007	0,9	I
8,1032	13,4506	6,8721	13178,5	4668,1	-2,3	1,0	1,1	0,013	0,5	II
8,0957	10,6090	6,8715	6457,3	4667,7	-2,7	0,8	1,3	0,007	0,7	I
8,0969	13,4358	6,8721	13190,9	4675,6	-4,8	1,0	1,3	0,010	0,5	II

Mittelwerth 4670,36

Bestimmungen mit	Mittelwerth: aus Tab. 2	Mittelwerthe aus Tab. 1
Gewichten II (200 g) . . .	4669,2	4671,0
" I (100 g) . . .	4671,2	4672,4
Draht 0,013 cm Dicke . . .	4667,9	4671,3
" 0,010 " " . . .	4671,3	—
" 0,007 " " . . .	4670,6	4673,9
Gewichten II an Draht 0,013	4667,9	4671,1
" II " " 0,010	4670,0	—
" I " " 0,010	4671,7	—
" I " " 0,007	4670,6	—
" I " " 0,013	—	4672,0
Gesamtmittel	4670,1	4671,9

Die vorstehende Zusammenstellung dient zur Vergleichung verschiedener Mittelwerthe aus Tab. 1 und 2. Alle Werthe gelten für den 16 cm langen Magnet ohne Aufhängestift und Spiegel.

Die Uebereinstimmung der Mittelwerthe aus beiden Beobachtungsreihen in Tab. 1 und 2 könnte besser sein. Die Differenz kommt zum Theil jedenfalls von dem nicht genau zu messenden Trägheitsmoment der beiden Kupferkappen, die bei den Messungen der ersten Tabelle auf dem Magnet sassen. Mit Sicherheit lässt sich ein zweiter Grund aus obigen Werthen feststellen. Infolge der Biegung des Aufhängedrahtes über der Ecke des Keiles oder der Kupferkappe wird derselbe sich nicht senkrecht hängen, sondern je nach der Grösse seines Durchmessers mehr oder weniger geneigt sein. Der gemessene Abstand beider Drähte wird darum kleiner sein als die Entfernung der Schwerpunkte beider Gewichte, was den Werth des berechneten Trägheitsmomentes zu klein erscheinen lässt. Da die Drähte bei den Versuchen der Tab. 1 länger waren, als bei denen der Tab. 2, so zeigt sich dieser Fehler hier auch grösser als dort. Eben deshalb sind auch die mit den dicken Drähten erhaltenen Werthe im allgemeinen kleiner als die durch Benutzung der dünnen gewonnen. Es lässt demnach auch die bisherige Anwendung von Drähten zum Anhängen der Gewichte, obwohl sie bedeutende Vortheile gegenüber den gebräuchlichen Seidenfäden bietet, manche Unsicherheiten bestehen.

b) Bestimmung durch bifilare Aufhängung.¹⁾ Zur Controle der erhaltenen Resultate wurde der Magnet mittelst des bifilaren Verfahrens untersucht. Es sei

g die Schwerebeschleunigung,

m die ganze aufgehängte Masse vermehrt um die halbe Masse der Aufhängedrähte,

e_1 und e_2 der obere und untere Abstand der Aufhängedrähte,

l das Mittel aus beiden Drahtlängen, vermindert um $\rho^2 \sqrt{2\pi E/m}$,

ρ der Radius des Drahtes,

E der Elasticitätsmodul der Substanz,

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1883. p. 411. — Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

D_2 die Directionskraftsumme beider Drähte.

Die vollständige bifilare Directionskraft ist dann:

$$D = g m \frac{e_1 e_2}{4l} + \frac{2\pi \varrho^4 E g}{5 l} = g m \frac{e_1 e_2}{4l} + D_2,$$

und das Trägheitsmoment der angehängten Masse:

$$K = \frac{D t^2}{\pi^2},$$

t ist die Schwingungsdauer des Apparates.

unbe-	$l = 267,317$ cm	durch den	$l = 267,842$ cm
lastet	$e_1 = 11,972$ "	Magnet	$e_1 = 11,972$ "
	$e_2 = 12,036$ "	belastet	$e_2 = 12,036$ "
	$g = 980,99$ [cm, g]	Suspension	63,19 g
	$\varrho = 0,043$ cm	Magnet . .	216,13 "
		Draht . . .	0,13 "
		$m =$	279,45 g

$$D_{\text{ohne Magnet}} = 980,99 \cdot 63,32 \frac{11,972 \cdot 12,036}{4 \cdot 267,317} + 0,7 = 8371,1 \text{ [cm, g]},$$

$$D_{\text{mit Magnet}} = 36893,2, \quad t_{\text{unbelastet}} = 0,69052 \text{ Sec.}$$

$$t_1 = 1,15008 \text{ Sec.}, \quad t_2 = 1,18060 \text{ Sec.},$$

t_1 und t_2 sind die Schwingungsdauern des Apparates, wenn der Nordpol des eingelegten Magnets 1) nach Norden, 2) nach Süden gerichtet ist.

Trägheitsmoment der Suspension 404,4 [cm, g]:

$$K = 4669,7 \text{ [cm, g]}.$$

c) Trägheitsmoment aus der Form berechnet.

Um auch noch ein Urtheil über die Homogenität des untersuchten Stahlstabes zu erlangen, wurden die Dimensionen abgemessen und das Trägheitsmoment unter Voraussetzung der Cylinderform berechnet. Als Dicke des Stabes wurde das Mittel aus 3 Messungen, zwei an den Enden und eine in der Mitte, angenommen. Der Unterschied des Durchmesser an beiden Enden beträgt nur ungefähr 0,01 mm.

Länge des Stabes bei 15°	16,009 cm
Durchmesser	1,480 "
Masse	216,13 g
Masse des Stabes, der die Aufhängeöffnung füllen würde	1,10 "

daraus:

$$K = 4669,4 \text{ [cm, g]}.$$

Diesem Werthe kommt natürlich bei der Frage nach dem wirklichen Trägheitsmoment nur sehr geringe Bedeutung zu, doch beweist er, dass grössere Dichteschwankungen des Materiales fehlen.

Die Uebereinstimmung der drei früher gefundenen Werthe ist eine befriedigende.

Mittelwerth aus Tab. 1 4671,9 [cm, g]

" " " 2 4670,1

durch bifilare Aufhängung 4669,7

Hauptmittel: 4670,6 [cm, g].

2. Trägheitsmoment des 20 cm langen Stabes.

a) Gauss'sche Methode. — Da der gemessene Abstand der Schwerpunkte beider Gewichte nach der in Tab. 1 und 2 angewendeten Art der Aufhängung mit einem einseitigen, unbestimmbaren Fehler behaftet ist, so wurde der neu angefertigte längere Magnet an den Enden mit Messingplatten versehen, um den Draht in senkrechter Stellung befestigen zu können. Die einzelnen benutzten Drähte hatten fast genau gleiches Gewicht (im Mittel 0,004 g), und blieben nach Entfernung der Gewichte bei Beobachtung der Schwingungsdauer ohne Belastung an dem Magnet. Das Trägheitsmoment zweier Drähte 0,8 [cm, g] ist deshalb von den Resultaten der Tab. 3_a abgezogen worden.

Tabelle 3_a.

Gewichte an Metalldrähten. Drähte senkrecht festgeklemt.

r (cm)	l' (sec)	l (sec)	K [cm, g]	d	δ	l (cm)	Draht- dicke cm	T sec	Nr. der Gewichte
10,0063	11,6071	8,1292	9483,8	+0,4	2,0	1,5	0,007	0,9	I
10,0046	11,6040	8,1283	9486,6	+3,2	2,0	1,2	0,007	0,8	I
10,0049	14,3720	8,1340	9479,4	-4,0	2,6	1,3	0,007	1,3	II
10,0065	11,6139	8,1340	9483,8	+0,4	2,0	1,3	0,007	0,8	I
Mittel			9483,4						

Um dieses Resultat mit den folgenden vergleichbar zu machen, wird davon subtrahirt:

- 1) das Trägheitsmoment von Spiegel und Aufhängestift 0,3
- 2) die Differenz der Trägheitsmomente der Endplatten für die Einklemmung von Draht und Seidenfäden 0,1

$$K = 9483,0 \text{ [cm, g]}.$$

Bei den Versuchen der Tabelle 3_b und 3_c waren die Drähte durch doppelte Seidenfäden ersetzt, deren Abstand immer nahe 0,1 cm genommen wurde. Diese Aenderung hatte einen doppelten Zweck. Erstens wurden dadurch die selbständigen Pendelschwingungen der Gewichte möglichst gehindert, und zweitens konnte der Abstand der Gewichte wegen der Feinheit des verwendeten Seidenfadens genauer gemessen werden. Ausserdem ist es dadurch möglich, die Schwingungsdauer der Gewichte um ihre Axe auf eine beliebige Grösse zu bringen. Die Buchstaben der Tabelle 3 haben die gleiche Bedeutung wie in Tabelle 1 und 2.

Tabelle 3_b.

Gewichte an doppelten Seidenfäden.

$r_{(cm)}$	$t'_{(sec)}$	$t_{(sec)}$	$K_{[cm, g]}$	α	δ	$l_{(cm)}$	T_{sec}	Nr. der Gewichte
10,0026	11,6195	8,1394	9483,9	+1,4	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3758	8,1384	9483,0	+0,5	2,2	0,7	1,3	I
10,0023	11,6200	8,1384	9477,5	-5,0	1,7	0,7	1,0	I
10,0025	11,6283	8,1444	9478,9	-3,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0015	14,3759	8,1401	9486,8	+4,3	2,2	0,6	1,3	II
10,0013	11,6260	8,1442	9483,1	+0,6	1,7	0,8	0,9	I
10,0023	14,3879	8,1453	9483,6	+1,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6269	8,1453	9486,1	+3,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3825	8,1427	9484,6	+2,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6251	8,1427	9480,9	-1,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3713	8,1361	9483,6 ^{*)}	+1,1	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6141	8,1350	9480,9	-1,6	1,7	0,7	1,0	I
10,0023	14,3702	8,1340	9481,9	-0,6	2,2	0,7	1,3	II
10,0023	11,6284	8,1450	9480,5	-2,0	1,7	0,7	1,0	I
Mittel			9482,52					

Gew. am gleichen Faden.
Unter r ist der Mittel-
werth der einzu-
nehmenden
Messungen.

^{*)} Nach dem viertletzten Versuche riss der Aufhängedraht des Magnets.

Von diesem Mittelwerthe ist wieder das Trägheitsmoment des Kupferstiftes und des Spiegels 0,3 [cm, g] abzuziehen:

$$K = 9482,3 \text{ [cm, g]}.$$

Mittel der Bestimmungen mit Gewicht I [100 g] 9481,5

" " " " " " II [200 g] 9483,9.

Die Genauigkeit der Versuchsergebnisse mit dem grossen Magnet übertrifft, wie vorausszusehen war, jene mit dem kurzen um fast das Doppelte; die Uebereinstimmung der aus der letzteren Anordnung mit bifilaren Seidenfäden gewonnenen Werthe ist wieder grösser, als die durch Benutzung von Draht gefundene.

Es zeigt dies mit Sicherheit einerseits auf die geringere Verwendbarkeit des Drahtes gegenüber der des Seidenfadens bei bifilarer Anwendung, dann ist es aber auch ein Beweis, dass die auf p. 288 und 289 erwähnten, aus selbständigen Pendelbewegungen entstehenden Fehler einen merkbaren Betrag erreichen. Neben den Vortheilen besteht aber auch die Unbequemlichkeit, dass der Abstand der Aufhängefäden von vorne und von rückwärts gemessen werden muss, am besten in der Nähe der (dünnen) Aufhängehaken. Ausserdem ergibt die Vergleichung der Endresultate aus Tab. 3_a und 3_b, dass bei senkrechter Einklemmung die früher beobachteten einseitigen Fehler fortfallen.

Fehler infolge der Beweglichkeit des Aufhängepunktes.

Es wurde jetzt versucht, ob nicht auch noch die aus der Beweglichkeit des Aufhängepunktes eines schwingenden Magnets entstehenden Unsicherheiten (p. 288) theilweise zu beseitigen möglich sei. Zu diesem Zwecke wurde eine weiche Federfahne über dem Schwingungskasten so festgeklemt, dass der Aufhänge Draht an derselben einen geringen Widerstand bei einer vorkommenden Bewegung finden musste. Die hier beobachtete grössere Dämpfung war sehr wenig von der früheren verschieden. Die Tab. 3_c enthält die gefundenen Resultate unter den gleichen Buchstaben wie früher.

Für die gleiche Combination der Theile wie in Tab. 3_a und 3_b findet man noch, durch Subtraction von 0,3 (Suspension):

$$K = 9481,7.$$

Die beiden vorher gefundenen Werthe waren:

$$9483,0,$$

$$9482,3.$$

Diese Uebereinstimmung ist eine ganz gute.

Tabelle 3c.

Gewichte an doppelten Seidenfäden, Schwingungsaxe des Magnets unveränderlich.

r (cm)	t' (sec)	t (sec)	K (cm, g)	d	δ	l (cm)	T	Nr. der Gewichte
10,0023	11,6228	8,1412	9480,9	-1,1	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	14,3767	8,1389	9483,0	+1,0	1,2	0,6	1,2	II
10,0023	11,6304	8,1467	9482,1	+0,1	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	11,6325	8,1483	9482,6	+0,6	1,7	0,6	1,0	I
10,0023	11,6391	8,1527	9481,6	-0,4	1,7	0,6	1,0	I
Mittel:			9482,04					

b) Bestimmung durch bifilare Aufhängung (p.300).

— Auch dieser Magnet wurde nach der Bifilarmethode in derselben Weise mit dem von der früheren Messung her unveränderten Apparate untersucht. Die Constanten desselben ohne Belastung waren die gleichen, mit Belastung folgende:

$l = 268,010$ cm	Suspension	63,189 g
$e_1 = 11,979$ "	Magnet	280,610 "
$e_2 = 12,037$ "	Draht	0,129 "
$m = 348,853$ g		

$$t_1 = 1,48945 \text{ sec}$$

$$t_2 = 1,44426 \text{ sec.}$$

$$K = 9481,9 \text{ [cm, g].}$$

Auch hier ist die Uebereinstimmung mit den früheren Werthen befriedigend.

c) Rechnung aus den Dimensionen. — Die Form dieses 20 cm langen Magnetstabes ist zur Bestimmung des Trägheitsmomentes ungünstiger, als die des früher untersuchten 16 cm langen Magnets. Seine cylindrische Gestalt ist weniger vollkommen, an den Enden sitzen Messingplatten, er ist an beiden Enden zur Befestigung der Platten angebohrt und besitzt 2 Nuten für die Suspension des Bifilarapparates. Ausserdem war der Magnet zum Schutze gegen den Rost mit einer Lackschicht versehen, die bei den vorhergehenden Versuchen mit gemessen wurde, sodass das Resultat der jetzigen Rechnung auf geringere Zuverlässigkeit Anspruch machen kann, als das von p. 301.

Länge des Stabes bei 15°	20,006 cm
Halbmesser	0,758 "
Gewicht ohne Platten und Schrauben	279,86 g
Gewicht eines Volumens Stahl, das die Auf- hängebohrung füllen würde	0,93 "
Gewicht der Messingplatten und Schrauben.	0,646 "
Halber Abstand derselben	10,05 cm
Gewicht des Weingeistlackes	0,10 g
Trägheitsmoment "	3,8 "

Daraus findet man das Trägheitsmoment unter Annahme der völlig cylindrischen Form:

$$9474,2 \text{ [cm, g];}$$

unter Berücksichtigung des ungleichmässigen Durchmessers (p. 291):

$$9479,2 \text{ [cm, g];}$$

unter möglichster Berücksichtigung aller Unvollkommenheiten der Form:

$$9479,0 \text{ [cm, g].}$$

Man kann die Unsicherheit des berechneten Werthes auf etwa $\frac{1}{2000}$ schätzen infolge mangelhafter Messung der Schraubenlöcher, Nuten und der Aufhängebohrung. Die Uebereinstimmung macht die Homogenität des Materiales wahrscheinlich.

Einige Vorbereitungsmaassregeln bei Bestimmung von Trägheitsmomenten.

Eine grössere Anzahl von verschiedenen Verhältnissen, die bei genaueren Messungen des Trägheitsmomentes durch Belastung berücksichtigt werden müssen, stellte Gauss zusammen, und Goldschmidt theilte sie in den „Resultaten des magnetischen Vereins“ p. 131. 1840 mit. Ausser jenen ergaben sich, zum Theil durch die veränderte Aufhängungsweise hervorgerufen, mit der Zeit noch einige Fehlerquellen, deren Beseitigung in den beschriebenen Versuchen angestrebt wurde.

Zunächst muss der Magnetismus des zu messenden Stabes möglichst constant gemacht werden, was nach den Vorschriften von Strouhal und Barus¹⁾ durch mehrmaliges Magnetisiren mit abwechselndem Kochen erreicht wird. Den Magnet hänge man mittelst eines harten Messingdrahtes von

1) Strouhal und Barus, Wied. Ann. 20. p. 683. 1888.

solcher Länge auf, dass die möglichen Variationen des Torsionscoefficienten unter $\frac{1}{10000}$ bleiben. Ein zu langer Faden erschwert die Beruhigung und bedroht die Stabilität der Drehungsaxe. Die vorher auf Magnetismus zu prüfenden Belastungscylinder sollen mindestens so schwer sein, dass durch dieselben das Trägheitsmoment um mehr als das Doppelte bis zum Dreifachen vermehrt wird. Oft wird ein bedeutend (bis zu zehnmal) grösseres Trägheitsmoment durch Belastung angerathen, doch ist zu berücksichtigen, dass die durch pendelnde Bewegung grosser Belastungsmassen hervorgerufene Inconstanz des Aufhängepunktes meistens vielmehr stören wird, als man an Genauigkeit der Beobachtung dadurch gewinnt. Aus demselben Grunde sind bei gleicher Masse kürzere Cylinder den langen vorzuziehen. Vermindert wird die Störung ferner durch Aufhängung der Belastung an Metalldrähten, statt an den gebräuchlichen Seidenfäden, noch besser durch Anwendung doppelter Seidenfäden, die ein spitzwinkliches Trapez bilden. Ein weicher elastischer Körper, durch den der Aufhänge Draht in der Nähe des Magnets mit wenig Reibung geht, drängt den Einfluss dieser Störungen noch mehr zurück.

Die Schwingungsdauer mit Belastung wird direct beeinflusst durch die zweifachen selbständigen Schwingungen der Cylinder. Die pendelnden Schwingungen werden durch die von Beling aufgestellte Gleichung berücksichtigt, die Drehungen um ihre Axe lassen sich ebenfalls leicht, wie aus p. 290 ersichtlich, in Rechnung setzen. Unter zweierlei Umständen weicht der deshalb corrigirte Werth von dem auf gewöhnlichem Wege gefundenen wenig ab, und sind zugleich die Schwingungsdauern mit Belastung leicht genau messbar. Einmal bei Anwendung von Gewichten, deren eigenes Trägheitsmoment gegen das des Magnets klein, während zugleich die Torsionsdirectionskraft ihrer Aufhängefäden (Metallfäden, bifilare Seidenfäden) gross ist. Zweitens durch Benutzung von Gewichten mit grossem Trägheitsmoment bei kleiner Torsionskraft der Aufhängefäden (dünner Seidenfäden). An der Hand der angestellten Versuche könnte man vielleicht für den ersten Fall Cylinder empfehlen, deren

Höhe dem doppelten Durchmesser gleich ist, für den zweiten Fall ist der Durchmesser derselben nur dadurch beschränkt, dass das durch Ausmessung und Rechnung bestimmte Trägheitsmoment der Cylinder um ihre Axe keine den Endwerth beeinflussende Ungenauigkeit enthalten soll. Da Kupfer fast völlig homogen ist, lässt sich die geforderte Grenze ziemlich weit ausdehnen.

Zum Schlusse möchte ich meinem hochverehrten, lang-jährigen Lehrer Hrn. Prof. F. Kohlrausch, auf dessen Anregung gegenwärtige Untersuchung entstand, meinen besten Dank darbringen für die stetige gütige Förderung vor und während der Arbeit.

Würzburg, phys. Laborat. 1885.

XI. Die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde; von Ernst von Fleischl.

(Aus dem 90. Bde. der Sitzungsber. d. kais. Acad. d. Wiss. II. Abth. vom 18. Dec. 1884 mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Durch Aufstellung der Gleichung der Wellenoberfläche in einem Medium zeigt die Theorie an, dass sie sich der in diesem Medium auftretenden, optischen Phänomene völlig bemächtigt und ihr analytisches Verständniss erledigt hat. Aber auch das anschauliche Verständniss ist kein vollkommenes, und fühlt sich nicht beruhigt, wenn ihm nicht als Basis für seine Constructionen die Vorstellung von der Gestalt und den räumlichen Eigenschaften der betreffenden Wellenoberfläche zu Gebote steht.

Die Gruppe merkwürdiger optischer Eigenschaften, welche viele an und für sich isotrope, feste und flüssige Substanzen während ihres Aufenthaltes in einem magnetischen oder electrischen Felde zeigen, ist unserem analytischen und anschaulichen Verständnisse noch nicht erschlossen, da weder die mathematische Behandlung, noch auch — soviel mir bekannt

ist — eine andere Art der Ueberlegung zur Construction einer Wellenoberfläche geführt hat, aus deren Gestalt die durch das Experiment festgestellten Thatsachen sich erklären.

Wenn in der folgenden Darstellung jene Literatur, welche sich mit der theoretischen Behandlung der Lichtbewegung im magnetischen Felde beschäftigt, ganz und gar unberücksichtigt bleibt, so erklärt sich das, und erscheint selbstverständlich durch den Mangel jeglicher Beziehung zwischen dem, was man in der Optik „Theorie“ nennt, und dem, was hier vorgebracht wird. Es handelt sich weder um den Versuch einer Theorie, noch überhaupt um das Bestreben, das Ziel der Theorie auf einem der bisher betretenen oder auf einem anderen Wege zu erreichen, sondern einzig und allein um die Mittheilung einer Muthmaassung über die Gestalt der Wellenoberfläche des Lichtes im magnetischen Felde, und um die Darlegung der Gründe, welche die gemuthmaasste Gestalt als wahrscheinlich — ja sogar sie, oder eine ihr sehr ähnliche Gestalt als die einzig mögliche erscheinen lassen. Ich denke, es versteht sich von selbst, dass durch einen solchen Nachweis, selbst wenn er gelingt, eine Theorie der betreffenden Lichtbewegung weder dargeboten, noch überflüssig gemacht ist, dass vielmehr ein solcher Nachweis nicht den mindesten Zusammenhang mit einer Theorie, keinerlei Beziehung zu einer solchen besitzt. Für ein anschauliches Verständniss der so eigenthümlichen Phänomene im magnetischen Felde, und für die Beseitigung des Zweifels, ob diese Erscheinungen auf Grund derselben Principien erklärbar seien, wie die übrigen optischen Phänomene, mag jedoch die von mir ersonnene Muthmaassung einigen Werth besitzen, und ihre ausführlichere Mittheilung glaube ich auch durch eine überraschende Uebereinstimmung rechtfertigen zu dürfen, welche sich zwischen einer, aus meiner Conjectur durch Rechnung abgeleiteten Function, und den Resultaten früherer, von Verdet angestellter Messungen ergeben hat — eine Uebereinstimmung, welche wesentlich weiter geht, als die zwischen jenen Messungen, und der von Verdet selbst aus ihnen abstrahirten Function.

Bekanntlich besteht die charakteristische Eigenthümlich-

keit der Lichtbewegung im magnetischen Felde, durch welche sie geradezu im Gegensatz zu der unter allen übrigen Bedingungen stattfindenden Lichtbewegung, und somit ganz isolirt ist, darin, dass in einem magnetischen Felde, in welchem die Verbindungslinie der Magnetpole sich von Nord nach Süd erstreckt, ein linear polarisirter Lichtstrahl, welcher das Feld in dieser Richtung durchzieht, und in dem z. B. die Schwingungsebene anfänglich vertical ist, ob er nun von Nord nach Süd, oder ob er von Süd nach Nord geht, in beiden Fällen in solcher Weise eine Drehung der Polarisationsebene erleidet, als würden die Schwingungsbahnen durch einen, nur deren obere Hälften treffenden Wind, der von Ost nach West streicht, um den Strahl als Axe zur Seite gedreht, so dass nach der üblichen Ausdrucksweise dieses Feld, wenn es von Süd nach Nord durchstrahlt wird, gleich einer linksdrehenden Substanz wirkt, aber wenn es von Nord nach Süd vom Strahl durchschritten wird, so wirkt, wie eine ebenso stark rechtsdrehende Substanz. Diese Eigenschaft und ihre unmittelbare Consequenz: eine Verdopplung der Drehung beim Hin- und Rückgang eines Strahles durch ein magnetisches Feld, — statt der bei allen, an und für sich drehenden Mitteln in diesem Falle erfolgenden Aufhebung der Drehung — sind zu bekannt, als dass länger bei ihnen zu verweilen nöthig wäre.

Bei dem innigen, durch die Fresnel'sche Theorie aufgestellten Zusammenhang zwischen Drehung der Polarisationsebene und Doppelbrechung fragt es sich nun, erstens ob die aus der Drehung im magnetischen Felde folgende Doppelbrechung in der üblichen Weise durch eine Wellenoberfläche darstellbar sei, und zweitens, wenn dies der Fall ist, welche Gestalt diese Wellenfläche hat.

Die Beantwortung dieser beiden Fragen ist das Ziel der vorliegenden Schrift. Dass es, wenn die magnetische Drehung der Lichtschwingungen auf Doppelbrechung beruht, einen geometrischen Ort geben muss, an dem die Bewegung zu einer gegebenen Zeit nach der Störung des Gleichgewichtes des Lichtäthers in einem Punkte des magnetischen Feldes anlangt, — darüber kann gar kein Zweifel bestehen.

Solange eine Gestalt im Raume nicht angebbar ist, welche der Bedingung dieses geometrischen Ortes entspricht, kann man etwa vermuthen, dass die magnetische Drehung anders zu Stande komme, als die in circular doppelbrechenden Substanzen. Geht man aber von der Voraussetzung einer magnetischen Doppelbrechung als Grundlage der magnetischen Drehung aus, dann kann man nur mehr fragen, wie die Wellenfläche aussieht, aber nicht, ob sie existirt. Von dieser Voraussetzung aber gehe ich in Folgendem aus.

Um die Gestalt der Wellenfläche im magnetischen Felde zu entwickeln, nehmen wir an, ihr Mittelpunkt, also der Ort, an welchem die Störung im Gleichgewichte des Lichtäthers stattfindet, liege auf der Verbindungslinie zweier punktförmiger Magnetspole (oder — um einen den wirklichen Verhältnissen entsprechenden Fall zu betrachten, an einer solchen Stelle eines magnetischen Feldes, an welcher die Kraftlinien untereinander merklich parallel verlaufen). — Die Verbindungslinie der Pole wählen wir zur X -Axe eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystemes, dessen Nullpunkt mit dem Punkte, an welchem die Störung stattfindet, zusammenfällt. Vorderhand sei das Feld noch nicht magnetisch, also etwa der den Electromagnet erregende Strom noch nicht geschlossen. Das Licht, dessen Fortpflanzungsweise wir untersuchen, sei linear polarisirtes. Dann ist seine Wellenoberfläche im isotropen Medium natürlich eine Kugeloberfläche; oder wenn wir, einer allgemein bekannten Vorstellungsweise uns bedienend, statt des einen linear polarisirten, zwei circular und einander entgegengesetzt polarisirte Strahlen annehmen, treten an die Stelle jener einen Kugelfläche zwei solche aufeinanderfallende, identische Flächen.

Nun stelle man sich vor, diese beiden Kugeloberflächen erleiden eine und dieselbe homogene lineare Deformation längs der X -Axe; das Maass der Deformation sei: n . — Hierdurch bleiben alle Entfernungen zwischen je 2 Punkten, die in einer zur X -Axe normalen Ebene liegen, unverändert; alle Entfernungen zwischen Punkten, die in einer Geraden liegen, welche zur X -Axe parallel ist, werden mit n multiplicirt — kurz: es werden aus den beiden iden-

tischen Kugeln: zwei identische Rotationsellipsoide, deren gemeinsamer Mittelpunkt der der früheren Kugeln ist. Wir müssen uns das Maass der Deformation, n , als eine Zahl denken, die nur um sehr wenig grösser ist als 1, so dass die Excentricität der Ellipsoide eine äusserst geringe ist, und ihre Brennpunkte (α , β) zu beiden Seiten von O , sehr nahe an O liegen. Nun denke man sich ferner das eine der beiden Ellipsoide längs der X -Axe um ein ganz kleines Stück aus seiner Anfangslage verschoben; und das zweite Ellipsoid um ein ebenso grosses Stück nach der entgegengesetzten Richtung auf der X -Axe verschoben, sodass die Mittelpunkte der beiden Ellipsoide zu beiden Seiten des O -Punktes gleich weit von ihm entfernt liegen. Man kann noch, um einen möglichst einfachen analytischen Ausdruck für diese Flächen zu bekommen, eine Beziehung aufstellen zwischen der Grösse der Deformation, und der Grösse der Verschiebung auf der X -Axe, und zwar folgende: Man schiebe das Ellipsoid e so weit, bis sein einer Brennpunkt (α_1) mit dem O -Punkt zusammenfällt, und das Ellipsoid e so, dass sein Brennpunkt (β_2) auf den O -Punkt fällt. Der analytische Ausdruck der Doppelfläche, welche durch die zum Theil ineinander liegenden Oberflächen beider Ellipsoide gebildet wird, enthält dann ausser dem Halbmesser r der zu Anfang vorhandenen Kugeln, und ausser dem linearen Maasse n , der Deformation, welche diese erlitten haben, keine benannten Constanten; er lautet:

$$(I) \quad \frac{n^2 x^2 + y^2 + z^2}{r^2 n^2} \pm \frac{2x\sqrt{n^2 - 1}}{r} = \frac{n^2 + 1}{n^2} - n^2.$$

Ich will nun zeigen, dass die hier entwickelte Doppelfläche alle Eigenschaften der Wellenoberfläche im magnetischen Felde hat, und mich hierzu der Fig. 1 bedienen, welche den Durchschnitt der Doppelfläche mit der XY -Ebene darstellt.¹⁾

Die mit Cursivbuchstaben (x, p, y, p') bezeichnete Ellipse gehört dem Ellipsoide e an, und ist der Theil der Wellen-

1) Der Deutlichkeit halber ist in dieser Figur die Excentricität der Ellipsen, ebenso wie ihre Verschiebung auf der X -Axe, im Vergleich mit den wirklich stattfindenden Verhältnissen sehr stark übertrieben.

fläche, welcher sich auf die rechts circular schwingenden Strahlen bezieht, das heisst: Strahlen rechts circular polarisirten Lichtes erreichen, gleichzeitig von O ausgehend, gleichzeitig die Punkte der Oberfläche des Ellipsoides e ; Strahlen links circular polarisirten Lichtes derselben Farbe, welche gleichzeitig mit den anderen von O ausgehen, erreichen in der gleichen Zeit die Punkte der Oberfläche des Ellipsoides i , dem in der Ebene der Zeichnung die mit griechischen Buchstaben (ξ , π , η , π') versehene Ellipse entspricht.

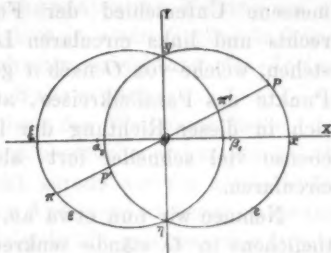


Fig. 1.

Zunächst ist ersichtlich, dass in der YZ -Ebene, in welcher die Ellipsoide einander schneiden, liegende Strahlen (z. B. die in der Y -Axe selbst liegenden Strahlen Oy , $O\eta$), mögen sie rechts oder links circular schwingendem Lichte angehören, die gleiche Geschwindigkeit haben, indem für diese Strahlen die Punkte beider Wellenflächen paarweise zusammenfallen. In Wirklichkeit bleibt die Polarisations-ebene von Strahlen linear polarisirten Lichtes, welche in der angegebenen Richtung das magnetische Feld durchsetzen, unverändert.

Ferner geht unmittelbar aus der Figur hervor, dass für Strahlen, welche von O in der Richtung Op ausgehen, die Geschwindigkeit eine verschieden grosse ist, je nachdem sie rechts oder links circular polarisirt sind; erstere gelangen in derselben Zeit bis p , in welcher letztere nur bis π' gelangen. Diese Differenz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden entgegengesetzt schwingenden Hälften des, von O aus in der Richtung nach p gehenden, linear polarisirten Lichtes drückt sich in der Beobachtung (durch einen Analyseur) als Drehung der Polarisations-ebene aus; in unserem Falle als Drehung „nach rechts“. Der Betrag dieser Drehung hängt von der Grösse der Differenz, also von der Länge $\pi'p$ ab, ist also ein und derselbe für alle Strahlen, die von O aus

nach irgend einem Punkte desjenigen Parallelkreises (auf dem Rotationsellipsoid e) hin gehen, auf dem der Punkt p selbst liegt. — Derselbe, durch die Länge $\pi p = -p'\pi$ gemessene Unterschied der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten rechts und links circularen Lichtes wird für Strahlen bestehen, welche von O nach π gehen, oder von O nach einem Punkte des Parallelkreises, auf dem π liegt; nur pflanzen sich in dieser Richtung die links circularen Strahlen um ebenso viel schneller fort, als im ersten Falle die rechts circularen.

Nehmen wir nun etwa an, die lineare Bahn des Aethertheilchens in O stände senkrecht auf der Zeichnungsebene, (liege in der Z -Axe) und werde durch den Punkt O halbt, so dass die eine Hälfte dieser Bahn vor der Ebene der Zeichnung liegt. Stelle ich mich in diese Schwingungsbahn und blicke dem von O nach p gehenden Strahle nach, so werden, nach dem früher Gesagten, die oberen (vor der Zeichnung liegenden) Hälften der Schwingungsbahnen mir um so stärker nach rechts sich zu neigen scheinen, je weiter gegen p zu das Licht fortschreitet. Bleibe ich zwar in O stehen, drehe mich aber um, und blicke dem von O aus nach π fortschreitenden Strahle nach, so werden mir, dem oben Gesagten zufolge, die Schwingungsbahnen der Aethermoleculc mit ihren oberen, vor der Zeichnungsebene gelegenen Hälften sich um so stärker nach links zu neigen scheinen, je weiter sie sich von mir entfernen. Für einen Beobachter jedoch, der nicht, wie ich, im Mittelpunkte der Welle steht, und der sich nicht, wie ich, zwischen den beiden Beobachtungen umdreht, sondern der den ganzen Vorgang von einem irgendwo ausserhalb der Wellenfläche gelegenen Standpunkte aus betrachtet, wird die Drehung der Schwingungsbahnen dem Sinne nach dieselbe sein, beim Fortschreiten des Lichtes von O nach p , wie beim Fortschreiten von O nach π — und wegen der Gleichheit der Längen πp und $p'\pi$, wird auch der Betrag der Drehung sich in beiden Fällen als der gleiche zeigen.

Aus der Voraussetzung dieser Gestalt der Wellenfläche folgt also unmittelbar jene Unabhängigkeit der Drehungs-

richtung der Polarisationssebene von dem Vorzeichen der Richtung des Fortschreitens des Lichtes, welche die charakteristische optische Eigenschaft des magnetischen Feldes ist, da sie die Einwirkung des magnetischen Feldes auf die Schwingungsrichtung des Lichtes in einen Gegensatz bringt zur Einwirkung auf die Schwingungsrichtung des Lichtes von Seiten aller anisotropen Substanzen.

Man sieht leicht ein, dass die Wellenoberfläche, aus deren Voraussetzung diese eben besprochene charakteristische Eigenthümlichkeit folgt, nicht gerade nur die eine Gestalt haben muss, welche der obigen Auseinandersetzung zu Grunde gelegt wurde, sondern dass vielmehr alle geschlossenen Doppelflächen dies leisten, welche aus der Rotation zweier, einander in der YZ -Ebene schneidender Curven um die X -Axe hervorgehen, wenn nur jede der beiden erzeugenden Curven das Spiegelbild der anderen bezüglich der YZ -Ebene ist, und wenn nur jeder ausserhalb der YZ -Ebene liegende Centralstrahl die Doppelfläche viermal schneidet.

Aber nicht blos dieser Verallgemeinerung unterliegt die oben geschilderte Wellenform, wenn sie keiner anderen, als der soeben ausführlich besprochenen Bedingung zu genügen hat, sondern sie lässt auch noch eine Specialisirung und zugleich Vereinfachung zu; indem eine Deformation der, unserer Entwicklung zu Grunde liegenden, identischen Kugelflächen überhaupt nicht nothwendig ist, sondern eine (kleine) Verschiebung der beiden Kugeln in entgegengesetzten Richtungen auf der X -Axe die gestellte Bedingung ebenfalls erfüllt. Der analytische Ausdruck dieser Doppelfläche:

(II) $(x \pm \xi)^2 + y^2 + z^2 = r^2$,
 kann aus der Gleichung, welche oben für die aus Ellipsoiden bestehende Wellenfläche gegeben wurde, nicht abgeleitet werden, da in Gleichung (I) ein Zusammenhang zwischen der Grösse der Deformation und der Grösse der Schiebung vorausgesetzt ist, durch welchen beide gleichzeitig verschwinden, so dass Gleichung (I), wenn man in ihr $n = 1$ setzt, direct in die Mittelpunkts Gleichung einer Kugel übergeht, während unsere Fläche (II) aus der früher besprochenen, durch Verschwinden der Deformation allein hervorgeht.

Auf die Frage, welche von allen, der bewussten Bedingung genügenden Doppelflächen die der Lichtbewegung im magnetischen Felde wirklich entsprechende sei, und aus welchen Gründen ich die durch Gleichung (I) dargestellte dafür halte, habe ich folgendes zu antworten:

Die Wellenfläche, welche der Lichtbewegung im magnetischen Felde entspricht, muss folgende Eigenschaften besitzen:

1. Sie muss durch einen Vorgang von stetiger Natur aus der Kugel ableitbar sein, wegen des Ganges der Erscheinungen bei stetig von Null aus wachsender Intensität des Magnetismus.

2. Sie muss die *YZ*-Ebene nur in einer Curve schneiden, und zwar in einer Kreislinie; also müssen ihre beiden Theile einander ebenfalls in dieser Weise schneiden (oder berühren).

3. Sie muss durch Rotation einer ebenen Figur um die *X*-Axe entstehen.

4. Es darf nicht, wie bei einaxigen Krystallen, der eine Theil ganz innerhalb des anderen liegen, sondern jeder Theil muss ein ebenso grosses Stück des anderen einschliessen, als von ihm selbst durch den anderen Theil eingeschlossen wird, so dass um die *YZ*-Ebene nur eine geometrische, aber keine optische Symmetrie besteht.

Durch die Erinnerung an die Rolle, welche das Rotationsellipsoid bei der einaxigen Doppelbrechung spielt, und durch die so nahe liegende Vorstellung, dass Kräfte, die ausschliesslich parallel einer geraden Linie wirken, auch nur Veränderungen an der Gestalt der einfachen Wellenfläche hervorrufen werden, welche durch Bewegungen ihrer einzelnen Punkte in der Richtung dieser Geraden entstehen, wie die lineare Deformation, endlich weil die aus einer solchen Deformation der Kugel hervorgehende Gestalt, nächst dieser selbst, überhaupt die einfachste ist, wurde ich auf die oben vorgetragene Muthmaassung geführt. Warum ich aber, nachdem ich schon dem — so zu sagen unerlaubten — Argumente der „Einfachheit“ einen Platz in meiner Betrachtung eingeräumt habe, bei der aus zwei Ellipsoiden bestehenden Wellenfläche stehen geblieben bin; weshalb ich überhaupt

mit einiger Bestimmtheit diese als die wirklich vorhandene Wellenfläche bezeichne, das wird sich aus dem Folgenden ergeben.

Es existirt nämlich noch eine, bisher von uns nicht in Betracht genommene Erfahrungsthatsache in diesem Gebiete von Erscheinungen, welche, sowie sie in der theoretischen Behandlung desselben einen der Hauptausgangs- und Anhaltspunkte der Rechnung bildet, so auch für die hier angestellten Betrachtungen dadurch von grosser Bedeutung ist, dass sie eine Wahl unter den verschiedenen möglichen Gestalten der Wellenfläche ermöglicht; indem sich aus jeder Wellenfläche, welche durch ihre Gleichung ausgedrückt ist, eine Beziehung zwischen zwei Variablen durch Rechnung ableiten lässt, welche mit der aus messenden Beobachtungen folgenden, analogen Beziehung derselben Variablen unmittelbar verglichen werden kann.

Bekanntlich hat M. Verdet in zwei kleinen Abhandlungen¹⁾ Versuche mitgetheilt, die er angestellt hatte, um zu prüfen, in welcher Weise die Grösse der Drehung der Polarisationssebene im magnetischen Felde abhängt von dem Winkel zwischen der Richtung der magnetischen Kraft, und der Richtung der Lichtstrahlen.

Für diese Untersuchung war natürlich die übliche Methode²⁾, welche angewendet wird, wenn beide Richtungen zusammenfallen, nicht brauchbar. Verdet beobachtete also an einem Apparate, welcher aus einem fixen optischen Theile, und einem beweglichen, electromagnetischen Theile bestand. Letzterer wurde von einem kräftigen Electromagnet mit verticalen Schenkeln gebildet, auf denen Polschuhe aus weichem Eisen, die einander genähert werden konnten, befestigt waren. Der Magnet war um eine verticale, mitten zwischen den Schenkeln durchgehende Axe drehbar, und seine Drehungen wurden mittelst Nonius und Alhidade abgelesen. Bei der Beobachtung wurde durch die zwischen den Polschuhen

1) M. Verdet, *Compt. rend.* 39. p. 548. u. 549. 1854. — *Ann. de chim. et de phys.* (3) 43. p. 37—44. 1855.

2) Durchbohrung der Pole oder Polschuhe.

befindliche Substanz in einer Horizontalebene durchgesehen, welche der oberen Begrenzungsebene der Polschuhe parallel und möglichst nahe war. Damit die Forderung eines homogenen Feldes, in dem die Substanz liegen soll, möglichst erfüllt werde, mussten die Polschuhe bestimmte Formen und Dimensionen erhalten, und ich verweile bei der Beschreibung der Verdet'schen Versuchsanordnung absichtlich so lange, um auf eine offenbar auf einem Lapsus calami beruhende, irrthümliche Angabe Verdet's aufmerksam zu machen, die einen so wesentlichen Punkt betrifft, dass ihre ausdrückliche Richtigstellung gewiss nicht überflüssig ist. Wenn nämlich solche Messungen, wie Verdet sie vorgenommen hat, einen Werth besitzen sollen, so muss dafür gesorgt sein, dass bei allen Lagen des magnetischen Feldes gegen die Substanz, diese sich in einem Systeme merklich paralleler Kraftlinien befindet. Dafür hat Verdet durch eine passende Wahl der Länge der einander zugekehrten Polflächen, im Vergleich zu der Länge ihres Abstandes von einander, und auch zu der Länge des durchstrahlten Cylinders oder Prismas der untersuchten Substanz, Sorge getragen, und dies auch in seinen beiden Mittheilungen erwähnt, und zwar in der ganz kurzen Mittheilung in den Comptes rendus in richtiger Weise; in dem ausführlichen Aufsatz aber in den Annales de Chimie et de Physique, in welchem er seinen Apparat sehr genau und mit Angabe aller Dimensionen beschreibt, ist die Rede von „deux lames en fer doux, de 0,016 de longueur sur 0,04 de largeur et 0,005 d'épaisseur“¹⁾; während die Länge, wie aus der beigegebenen Figur, und aus der entsprechenden Stelle der anderen Abhandlung ganz unzweifelhaft hervorgeht, nicht 16 mm, sondern 16 cm betrug. — Der Abstand der inneren Flächen der Polschuhe von einander war gleich 8 cm, und die geprüften Substanzen wurden in ungefähr 4 cm dicker Schicht von den Lichtstrahlen durchsetzt.

Verdet gibt an, dass er mehrere Reihen von Messungen gemacht hat, an fünf verschiedenen Körpern: An einer Sorte

1) l. c. p. 39.

von Flintglas, an Schwefelkohlenstoff, und an drei verschiedenen Proben des schweren Faraday'schen Glases. In dem kurzen Aufsatz in den *Comptes rendus* theilt er jedoch die unmittelbaren Ergebnisse seiner Messungen gar nicht mit, sondern spricht nur das aus ihnen abstrahirte, bekannte Gesetz aus, dass die Drehung der Polarisationssebene dem Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der magnetischen Kraft, und der Richtung der Lichtstrahlen proportional sei; aber auch in der ausführlicheren Abhandlung theilt Verdet leider nur 2 Messungsreihen mit, und sagt, die übrigen seien diesen beiden ähnlich gewesen. Die Uebereinstimmung der direct abgelesenen Drehungen mit den aus dem Cosinusetz berechneten ist in beiden Reihen bekanntlich eine allgemein als hinreichend angesehen.

Die Wichtigkeit solcher Messungen für die Kritik der von mir vorgeschlagenen Wellenflächen ist unmittelbar ersichtlich. Da die letzteren durch ihre Gleichungen gegeben sind, so lässt sich aus diesen leicht für jede solche Wellenfläche berechnen, welches Gesetz sie für die Abhängigkeit der Drehung vom Winkel zwischen Krafrichtung und Lichtstrahl bedingt. Bei der Berechnung dieses Gesetzes für die aus 2 Rotationsellipsoiden bestehende Wellenfläche habe ich die Annahme, welche der Gleichung (I) zu Grunde liegt, dass nämlich die Verschiebung mit der Deformation in bestimmter Weise zusammenhängt, nicht gemacht; ferner konnte ich mich auf die Betrachtung des Durchschnittes der Wellenfläche mit der XY -Ebene beschränken.

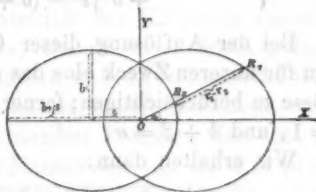


Fig. 2.

Bezeichnet man die kleine Axe der Ellipsen (Fig. 2)¹⁾ mit $2b$, ihre grosse Axe mit $2(b + \beta)$, die Entfernung ihres

¹⁾ Auch in dieser Figur sind, wie in der ersten, die Excentricität der Ellipsen, und ihre Verschiebung auf der X -Axe sehr stark übertrieben dargestellt.

Mittelpunktes von O mit ε , so ist die Gleichung beider Ellipsen:

$$(1) \quad \frac{(x \pm \varepsilon)^2}{(b + \beta)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Um zu dem Gesetze, welches wir suchen, zu gelangen, ist zu bemerken, dass der Betrag der Drehung der Polarisationsebene von der Grösse des Unterschiedes der Geschwindigkeit des rechts circularen und des links circularen Strahles abhängt. Diese Geschwindigkeiten werden durch die, in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege OR_1 und OR_2 für den Strahl, welcher den Winkel α mit der X -Axe einschliesst, gemessen.

Es ist also zu berechnen, wie sich — wenn wir allgemein OR_1 mit r_1 , und OR_2 mit r_2 bezeichnen — die Differenz $r_1 - r_2$ mit dem Winkel α ändert.

Die durch Transformation der Gleichung (1) auf Polarkoordinaten gewonnene Gleichung:

$$(2) \quad \frac{(r \cos \alpha \pm \varepsilon)^2}{(b + \beta)^2} + \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1.$$

lässt sich leicht auf die Form einer nach fallenden Potenzen von r geordneten, quadratischen Gleichung bringen:

$$(3) \quad \begin{cases} r^2 \{ b^2 \cos^2 \alpha + (b + \beta)^2 \sin^2 \alpha \} \pm r \cdot 2 \varepsilon \cos \alpha b^2 \\ + b^2 \{ \varepsilon^2 - (b + \beta)^2 \} = 0. \end{cases}$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach r braucht man für unseren Zweck bloss das eine Vorzeichen der Wurzelgrösse zu berücksichtigen; ferner setzen wir der Kürze wegen: $b = 1$, und $b + \beta = a$.

Wir erhalten dann:

$$(4) \quad r = \frac{a \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha (a^2 - \varepsilon^2)}}{\cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha} \pm \frac{\varepsilon \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}.$$

Nennen wir den ersten Theil des Ausdruckes, rechts vom Gleichheitszeichen: A , den zweiten Theil: B , so haben wir:

$$(5) \quad r_1 = A + B, \quad r_2 = A - B.$$

Für die von uns gesuchte Differenz der Geschwindigkeiten erhalten wir:

$$r_1 - r_2 = 2B, \quad \text{somit:}$$

$$(6) \quad r_1 - r_2 = \frac{2\varepsilon \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + (1 + \beta)^2 \sin^2 \alpha},$$

und durch Reduction im Nenner:

$$(7) \quad r_1 - r_2 = \frac{2\varepsilon \cos \alpha}{1 + 2\beta \sin^2 \alpha + \beta^2 \sin^4 \alpha}.$$

Aus Gleichung (7)¹⁾ geht schon hervor, dass für die aus zwei Kugeln bestehende Wellenfläche, für welche (wegen $\beta = 0$) das gesuchte Gesetz durch die Gleichung $r_1 - r_2 = 2\varepsilon \cos \alpha$ ausgedrückt wird, aus unserer Annahme dieselbe Proportionalität mit dem Cosinus von α folgt, welche von Verdet aus seinen Erfahrungen abstrahirt wurde.

Um zu dem entsprechenden Gesetze für die aus Ellipsoiden bestehende Wellenfläche zu gelangen, muss man die Anfangsglieder der Reihe entwickeln, welche aus der in (7) angezeigten Division hervorgeht, und da erhält man:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} [2\varepsilon \cos \alpha] : [1 + 2\beta \sin^2 \alpha + \beta^2 \sin^4 \alpha] &= 2\varepsilon \cos \alpha - 4\varepsilon \beta \cos \alpha \sin^2 \alpha \\ &+ 2\varepsilon \beta^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha (4 \sin^2 \alpha - 1) - \dots \end{aligned} \right.$$

Die Grösse 2ε , durch welche natürlich die ganze Reihe theilbar sein muss, hängt unmittelbar mit der Verschiebung der beiden Theile der Doppelfläche auf der X -Axe, vom O-Punkte nach beiden Seiten hin, zusammen. Die Grösse β , welche ein Maass der Excentricität der Ellipsoide darstellt, wird, der Erfahrung gemäss, ebenso wie ε , klein gedacht werden müssen neben der Einheit, und da die späteren Glieder der oscillirenden Reihe immer höhere Potenzen von β enthalten, neben rasch wachsenden Potenzen der echt gebrochenen trigonometrischen Functionen von α , so wird uns zunächst der Einfluss des zweiten Gliedes der Reihe auf den Gang der Function interessiren, mit welchem wir uns sofort

1) Der Betrag dieser Differenz wäre eigentlich streng genommen nicht — wie hier geschehen ist — an der Wellenoberfläche selbst, sondern an der aus ihr abzuleitenden Hamilton'schen „surface of wave slowness“ zu berechnen; jedoch kommt der Unterschied zwischen beiden Resultaten für unseren Fall absolut nicht in Betracht.

beschäftigen wollen.¹⁾ Betrachten wir also nur die beiden ersten Glieder der Reihe (8), so erhalten wir:

$$(9) \quad r_1 - r_2 = 2\varepsilon \cos \alpha - 4\varepsilon \beta \cos \alpha \sin^2 \alpha = 2\varepsilon (\cos \alpha - \beta \sin \alpha \sin 2\alpha).$$

Wie schon oben aus Gleichung (7), so lässt sich auch aus Gleichung (9) das von Verdet aufgefundene Cosinusetz ableiten, wenn man $\beta = 0$ setzt, also die Wellenfläche als aus 2 Kugeln bestehend ansieht.

Wenn man aber den Einfluss näher betrachtet, welchen das zweite Glied in der Klammer von (9) auf den Gang der Function nimmt, unter der Voraussetzung, dass β ein kleiner, echter Bruch sei, so bemerkt man, dass, während α von Null bis 90° wächst, das zweite Glied in der Klammer zwar wegen des Factors $\sin \alpha$ stets wachsen würde, wegen des Factors $\sin 2\alpha$ aber nicht nur für $\alpha = 0$, den Werth Null hat, sondern auch für $\alpha = 90^\circ$ der Null gleich wird, so dass, wenn man dieses zweite Glied berücksichtigt, nicht die von Verdet angenommene einfache Cosinusfunction, sondern eine von der Cosinusfunction bei $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^\circ$ gar nicht, zwischen diesen beiden Werthen aber dadurch von ihr verschiedene Function herauskommt, dass von den Werthen, welche nach Verdet's Gesetz zu erwarten wären, noch etwas abgezogen werden muss, um auf die wahren Werthe zu kommen. Die gefundenen Grössen der Drehung müssen also, verglichen mit den aus Verdet's Gesetz berechneten, von $\alpha = 0$ bei wachsendem α zu klein werden; und erst wenn α sich 90° nähert, wieder mit dem Cosinusetz übereinzustimmen beginnen.

Betrachten wir nun die von Verdet durch Messung gefundenen Werthe. Verdet selbst hat sie mit den von dem Cosinusetz geforderten verglichen, indem er, nebst dem Winkel der Drehung der Polarisationssebene, bei jeder Position den Quotienten aus diesem Werthe, dividirt durch den Cosinus des Positionswinkels, angibt. Seine eine Ver-

1) Ein besonderer Beweis für die Convergenz dieser Reihe ist nicht nöthig, nachdem oben auf den Umstand hingewiesen ist, aus dem sich ihre Convergenz von selbst ergibt: dass sie gleichzeitig fällt und oscillirt.

Reihe, bei welcher das Licht durch eine 44 mm dicke Schicht Schwefelkohlenstoff ging, lautet¹⁾:

α	Drehung	Drehung $\cos \alpha$
0°	5° 58' 0"	358,0
15	5 45 45	357,25
30	5 7 45	355,25
45	4 9 0	352,0
60	2 58 45	357,50

Man sieht, dass der Gang der Abweichungen der Beobachtungen Verdet's von seinem Gesetze ganz der Voraussetzung entspricht, dass in Gleichung (9) β einen von Null verschiedenen Werth hat, dass also die Wellenfläche nicht aus 2 Kugeln, sondern aus 2 Ellipsoiden besteht; wenn auch die Excentricität derselben nicht gross ist, so reicht sie offenbar aus dafür, dass sich die durch sie bedingten Unterschiede in der Beobachtung deutlich bemerkbar machen.

Auch die zweite von Verdet mitgetheilte Reihe von Messungen, welche an einer 40 mm dicken Schicht schweren Faraday'schen Glases angestellt wurden, entspricht dieser Voraussetzung. Sie lautet²⁾:

$\alpha =$	0°	15°	30°	45°	60°	75°
Drehung $\cos \alpha$	= 535,75	527,25	531,25	537,50	537,50	539,00.

Ich sage: sie entspricht der Voraussetzung, weil der Gang der Abweichungen mit dem, von unserer Function geforderten insofern übereinstimmt, als die Werthe des Quotienten: $\frac{\text{Drehung}}{\cos \alpha}$ von einem zwischen den Enden des Viertelkreisbogens gelegenen Punkte, an welchem dieser Werth ein Minimum ist, nach beiden Enden zu stetig wachsen.

Eine viel weiter gehende Uebereinstimmung ist wohl nicht zu erwarten, erstens wegen der nothwendigen Beobachtungsfehler, und dann auch, weil Verdet, wenn er schon aus seinen sämtlichen Messungsreihen bloß zwei zur Be-

1) Verdet, Ann. de chim. et de phys. (3) 43. p. 43. 1855.

2) Verdet, l. c. p. 43.

stätigung seines Gesetzes mittheilt, gewiss diejenigen, welche am besten mit diesem Gesetze stimmen, gewählt haben wird. Besonders wenn man diesen Umstand berücksichtigt, wird man wohl nicht geneigt sein, die in beiden Beispielen hervortretende Uebereinstimmung der Abweichungen mit den von meiner Formel geforderten für einen blossen Zufall, für das Resultat von Beobachtungsfehlern zu halten. Es wäre doch zu wunderbar, wenn die Beobachtungsfehler alleammt gerade in dem Sinne meiner Formel, und in solcher Regelmässigkeit ihr entsprechend, sich durch blossen Zufall eingefunden hätten.

Nach allem diesem glaube ich wohl, sagen zu dürfen:

1. dass die Lichtwellenoberfläche im magnetischen Felde sicher im allgemeinen die von mir beschriebene Gestalt zweier einander schneidender Rotationsflächen hat.

2. dass diese beiden Flächen jedenfalls zwar nur äusserst wenig von der Kugelgestalt abweichen, dass aber dessen ungeachtet

3. die aus Verdet's Cosinusetz abzuleitende, und mit diesem Gesetz allen bisherigen theoretischen Forschungen unbewusst zu Grunde gelegte Kugelgestalt beider Theile der Doppelfläche wahrscheinlich nur eine erste Annäherung an die wirkliche Gestalt ist, und

4. dass die Gestalt der Lichtwellenoberfläche im magnetischen Felde eine aus zwei Rotationsellipsoiden, die in der Richtung ihrer grossen Axe so gegeneinander verschoben sind, dass sie grösstentheils ineinander liegen, bestehende Doppelfläche ist.

XII. Ein neues Electrodynamometer;

von J. W. Giltay.

(Hierzu Taf. III Fig. 11–17.)

Der hierunter beschriebene Apparat soll hauptsächlich für die Messung telephonischer Wechselströme dienen. Der von Ader¹⁾ zu diesem Zweck construirte Apparat wird sich wohl mehr für die Demonstration als für Messungen eignen. Das Electrodynamometer von Kohlrausch²⁾ gibt 1 mm Ausschlag bei 2 m Scalendistanz, wenn ein Strom von $\frac{1}{17000}$ Ampère durchgesandt wird; ungefähr dieselbe Empfindlichkeit hat das Siemens'sche Dynamometer.³⁾ Da nun aber nach Bosscha⁴⁾ alternirende Ströme von 77×10^{-8} Ampère noch genügen, um einen deutlichen Ton in einem Bell'schen Telephon hervorzurufen, so ist eine grössere Empfindlichkeit als diejenige der genannten Instrumente für telephonische Messungen sehr gewünscht. Freilich sind die beiden zuletzt genannten Apparate nicht für diesen Zweck construiert.

Bellati⁵⁾ hat ein ganz neues Princip für die Construction des Electrodynamometers angegeben.

Wenn man in einem Galvanometer die Magnetsadel durch einen Eisenstab ersetzt und diesen in der Windungsebene aufhängt, so wird er von einem durch die Windungen gehenden Strom nicht abgelenkt werden, weil er nicht magnetisch ist. Wird der Stab in die Meridianebene und zu gleicher Zeit senkrecht auf die Windungsebene gestellt, so wird er von einem durch die Windungen gehenden Strom magnetisirt, aber er wird ebensowenig wie vorher aus seiner Lage abgelenkt werden, da er schon die Maximalausweichung (90°) hat. Wenn man aber den Stab einen Winkel, der kleiner als 90° ist, mit der Windungsebene machen lässt, so wird er von einem durch die Windungen gehenden Strom sowohl magnetisirt als abgelenkt werden. Da mit der Stromrichtung sich auch die Polarität des Eisenstabes umkehrt,

1) Ader, La Lumière Électrique 10. p. 159. 1880.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 18. p. 556. 1882.

3) W. Siemens, Electrotechn. Zeitschr. 2. p. 14. 1881. Beibl. 5. p. 203.

4) Bosscha, Arch. Néerland. 13. p. 250. 1878. Beibl. 2. p. 513.

5) Bellati, Atti del R. Ist. Ven. (6) 1. p. 563. 1883. Beibl. 7. p. 617.

so wird die Abweichung stets nach derselben Seite stattfinden, welche auch die Richtung des Stromes sein möge. Hieraus folgt, dass auch alternirende Ströme eine Bewegung des Eisenstabes verursachen werden.

Bellati hat sein Princip nur an einem sehr provisorisch construirten Apparat probirt. Die von ihm erzielten Resultate sind aber so befriedigend, dass ich mich bemüht habe, einen Apparat nach seinem Systeme zu construiren, wovon ich im Folgenden die Beschreibung geben will. Ich muss noch erwähnen, dass schon Vicentini¹⁾ sich bei seinen Untersuchungen über die Widerstände von Salzlösungen eines Bellati'schen Dynamometers, welches jedoch ohne Spiegelablesung war, bedient hat.

Auf einer runden Holzscheibe (Fig. 11) ist ein Hartgummi-rahmen *a* befestigt, ganz übereinstimmend mit demjenigen, welcher beim Nobili'schen Multiplicator gebraucht wird. Um den Rahmen sind 2400 Windungen eines 0,1 mm starken Kupferdrahtes gelegt. Dieser Draht ist in 4 Abtheilungen, jede von 600 Windungen, eingetheilt; die beiden Enden jeder Abtheilung sind mit zwei benachbarten Klemmschrauben verbunden und können dadurch auf verschiedene Weise combinirt werden. Wenn sämmtliche Windungen hintereinander verbunden waren, so war der Widerstand meines Instrumentes 408 Ohms.

Der Windungsrahmen wird von einer runden Hartgummiplatte bedeckt, worauf zwei weisse Linien gezeichnet sind; die eine steht senkrecht auf der Windungsfläche, die andere macht einen Winkel von 45° damit. Auf dem metallenen Ring *R* befinden sich 3 Messingsäulen, welche die runde Platte *P* tragen. In diese Platte wird das Messingstück geschraubt, worin die Glasröhre *B* festgekittet ist. Um den Apparat vor Luftströmungen zu schützen, wird ein metallener Mantel (Fig. 12) über die Platte *P* geschoben. Derselbe passt in den Ring *R* und ist von einer seitlichen, durch Spiegelglas verschlossenen Oeffnung versehen. Um der lästigen Re-

1) Vicentini, Atti della Accad. R. delle Sc. di Torino (2) 36. 1894: Beibl. 9. p. 131.

flexion der Spiegelglasplatte zu entgehen, macht diese letztere einen Winkel von einigen Graden mit der Axe des Mantels.

In Fig. 13 ist das Eisenbündel mit dem Spiegel dargestellt, cd ist ein dünnes Hartgummirohr, ein Ganzes bildend mit der Hartgummistange ab . In das Rohr cd ist ein Bündel sorgfältig geglühter Eisendrähte eingeschoben, deren jeder 18 mm lang und 0,4 mm dick ist; ef ist ein aus einem weissem Schweinehaar bestehender leichter der Axe des Eisenbündels paralleler Zeiger. In die obere Seite von ab ist ein Messingdraht gh eingeschraubt, woran der Planspiegel befestigt ist. Dieser hat einen Durchmesser von 20 mm, ist um die Stange gh verstellbar und kann folglich in jede beliebige Verticalebene gebracht werden. Das ganze System hängt an 2 Coconfäden, welche 30 cm lang und etwa 0,3 mm von einander entfernt sind.

Das Instrument wird in der Weise aufgestellt, dass die Windungsebene einen Winkel von 45° mit dem magnetischen Meridian bildet. Der Mantel wird jetzt in eine solche Lage gebracht, dass man durch das Fensterchen diejenige weisse Linie auf der Hartgummiplatte sehen kann, welche einen Winkel von 45° mit den Windungen macht. Durch Drehung des oben in der Glasröhre befindlichen Messingstabes, woran die Coconfäden befestigt sind, kann man Sorge tragen, dass der Zeiger ef (Fig. 13) sich gerade über dieser weissen Linie befindet. In diesem Falle bildet das Eisenbündel einen Winkel von 45° mit der Windungsebene und steht senkrecht zum magnetischen Meridian, ist also der Induction des Erdmagnetismus entzogen. Ist dies alles geschehen, so wird der Mantel soweit gedreht, bis die Glasplatte sich dem Spiegel gegenüber befindet.

Die Schwingungszeit des aufgehängten Systems ist etwa $15''$, es können also die Umkehrpunkte mit Spiegelablesung sehr bequem wahrgenommen und notirt werden.

Die folgende Messung möge zeigen, dass der Nullpunkt genügend constant ist; der Abstand zwischen Spiegel und Scala war 2 m. In Fig. 14 ist angedeutet, wie die hierzu benutzten Wechselströme erregt wurden. A ist ein kleiner Inductionsapparat, wovon der primäre Draht mit einem

Bunsen'schen Elemente *B* verbunden und der Neeff'sche Hammer in Vibrationen versetzt wird; die secundäre Leitung bleibt ungeschlossen. Einige Centimeter vom Inductor entfernt liegt ein Bell'sches Telephon *T*¹⁾. Das jedesmalige Hervortreten und Verschwinden des Magnetismus im Eisenkern des Inductors inducirt Aenderungen im Magnetismus des Eisenkernes des Telephons, wodurch in der Telephonspule Wechselströme entstehen, welche zum Dynamometer *D* geleitet werden. Die auf diese Weise erregten Ströme sind ziemlich constant, wenigstens wenn die Contactschraube des Hammers ordentlich festgesetzt und der Platincontact gehörig gereinigt ist; für Messungen von längerer Dauer ist die Einrichtung aber ungenügend, da der Neeff'sche Hammer zuweilen plötzlich rascher oder langsamer zu vibriren anfängt, und die Intensität der Inductionsströme sich dadurch ändert.

Es wurden jedesmal fünf aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte notirt und daraus der Schwingungsmittelpunkt bestimmt.

Zuerst wurde der Nullpunkt bestimmt, danach wurden die Wechselströme durch das Instrument geschickt; jetzt wurde die Leitung wieder geöffnet und der Nullpunkt abermals bestimmt u. s. w.

In der erste Columne der untenstehenden Tabelle findet man die verschiedenen Werthe, die ich für den Nullpunkt fand; in der zweiten Columne den Mittelpunkt der Schwingungen, welche der Eisencylinder machte, wenn die Wechselströme durch das Instrument gingen.

Nullpunkt	Mittelpunkt der Schwingungen, wenn der Strom durch den Apparat ging
137,06	223,57
137,23	222,72
136,58	222,37
136,78	221,88
136,68	222,32
136,70	

1) Ein Siemens'sches Telephon kann für dieses Experiment nicht dienen, da dieses einen Hufeisenmagnet mit 2 Drahtspulen enthält. Wenn der Magnetismus im einen Eisenkern verstärkt wird, wird er gleichzeitig im anderen geschwächt, es entstehen also in beiden Spulen entgegengesetzt gerichtete Ströme, welche sich ungefähr aufheben.

Wie man sieht, ändert sich der Nullpunkt nur sehr wenig, es ist aber dazu nothwendig, dass die Zimmertemperatur ungefähr dieselbe bleibe. Bei einer Temperaturerhöhung von 10° C. änderte sich der Nullpunkt um etwa 80 mm und folgte ziemlich regelmässig den Temperaturänderungen des Zimmers.

Die Empfindlichkeit meines Dynamometers möge durch die folgenden Experimente ins Licht gestellt werden. Der Abstand zwischen Scala und Spiegel war wieder 2 m, sämtliche 2400 Windungen waren hintereinander verbunden. Ein Blake-Mikrophon wurde mit einem Leclanché-Element und dem primären Draht eines kleinen Inductors verbunden, die secundäre Leitung wurde mit dem Dynamometer in Verbindung gebracht. Wurde jetzt auf 30 bis 40 cm Distanz von der Mikrophonmembran gesprochen, so zeigte das Dynamometer einen ersten Ausschlag von etwa 30 mm. Wurde ganz leise in ein Siemens'sches Telephon gesprochen, so gab das Instrument einen ersten Ausschlag von 100 mm. Das Sprechen dauerte bei diesen Experimenten stets etwas länger als die halbe Schwingungszeit des aufgehängten Systems. Da die durch das Sprechen in dem Telephon errregten Ströme jeden Augenblick ihre Intensität ändern, konnte ich nur erste Ausschläge und keine constante Ablenkung notiren. Wurde in das Siemens'sche Telephon ein kräftiges O gerufen, so gab das Dynamometer einen ersten Ausschlag von etwa 90° . Dieser Winkel konnte natürlicherweise nicht mit Spiegelablesung gemessen werden, sondern wurde durch das im Mantel befindliche Fensterchen an der Bewegung des weissen Zeigers wahrgenommen.

Wird das Instrument für Wechselströme, die nicht zu kräftig sind, um mit Spiegelablesung gemessen werden zu können, gebraucht, so wird man vom remanenten Magnetismus des Eisenbündels nichts bemerken. Wird aber ein kräftiger, constant gerichteter Strom durch die Windungen geschickt oder ein kräftiger Magnet dem Apparate genähert, so wird es zuweilen vorkommen, dass das Eisenbündel etwas Magnetismus behält. Dies hat dann stets eine Verschiebung des Nullpunktes zur Folge, weil der Erdmagnetismus

versucht, das Eisenbündel in den magnetischen Meridian zu bringen. Man würde durch Glühen der Eisendrähte ihnen diesen Magnetismus wieder nehmen können, ich habe aber ein einfacheres und ebenso zweckmässiges Mittel dafür ausgedacht. Wir wollen voraussetzen, dass das Eisenbündel durch einen Strom, den wir positiv nennen wollen, remanenten Magnetismus bekommen hat. Wenn wir jetzt einen negativen Strom, der ein wenig schwächer als der vorhergehende ist, durch die Windungen schicken, so wird, nachdem dieser aufgehört hat, das Eisen wieder einigen remanenten Magnetismus behalten, das Bündel wird aber jetzt einen Nordpol haben, wo es früher einen remanenten Südpol hatte, und da der negative Strom schwächer war, als der frühere positive, wird auch jetzt der Magnetismus, den das Bündel behält, schwächer als vorher sein. Wenn man also Wechselströme abnehmender Intensität in das Instrument sendet, wird der remanente Magnetismus stets schwächer werden und zuletzt ganz verschwinden.¹⁾ Zu dem Zwecke verbinde ich ein Siemens'sches Telephon mit dem Instrument und rufe anfangs laut, aber stets schwächer werdend, den Vocal O. Wenn der Schall endlich ganz aufgehört hat, so hat auch das Eisenbündel seinen remanenten Magnetismus ungefähr völlig verloren. Das folgende Experiment zeigt die Wahrheit dieser Behauptung.

Der Nullpunkt war beim Anfang der Messung 181.5. Jetzt wurde ein kräftiger Inductionsstrom in das Instrument geschickt. Dieser wurde erregt durch das plötzliche Eindrücken der Eisenplatte des Siemens'schen Telephons; bevor die Platte losgelassen, wurde die Leitung schon wieder unterbrochen. Die Scala verschwand ganz aus dem Felde des Fernrohrs; nachdem das Eisenbündel zur Ruhe gekommen, ergab sich, dass der Nullpunkt 126 geworden war, das Eisenbündel zeigte also remanenten Magnetismus. Nun wurde die Leitung wieder geschlossen, und auf die früher beschrie-

1) Eine auf dasselbe Princip beruhende Methode ist von Deprez angewendet worden, um Taschenuhren, die durch die Nähe grösserer Dynamomaschinen magnetisirt waren, ihren Magnetismus zu entnehmen. Compt. Rend. 97. p. 41. 1883.

bene Weise der Vocal O in das Telephon hineingerufen. Das Eisenbündel machte Schwingungen von etwa 180° ; nachdem es wieder in die Ruhelage gekommen, war der Nullpunkt 178,5 geworden. Das Telephon wurde jetzt in umgekehrtem Sinne mit dem Dynamometer verbunden, wodurch also auch der Inductionsstrom, durch das Eindringen der Eisenmembran erregt, in umgekehrter Richtung durch den Apparat ging. War das Eisenbündel durch diesen Strom remanent magnetisirt, so musste es einen Nordpol zeigen wo es früher einen Südpol hatte; dies war auch wirklich der Fall, was sich aus der Thatsache ergab, dass der Nullpunkt jetzt höher geworden war: der Spiegel zeigte in der Ruhelage auf 300. Nachdem abermals ein schwächer werdendes O gerufen war, kam der Nullpunkt wieder zurück auf 179,0.

Wie man sieht, wird der remanente Magnetismus des Eisenbündels auf diese Weise sehr vollständig entfernt. Es passiert aber zuweilen, dass man dieses Experiment einige mal wiederholen muss, bevor der ursprüngliche Nullpunkt wieder eintritt. Die Ursache liegt wahrscheinlich darin, dass das Eisenbündel infolge des O-Rufens sehr grosse Schwingungen macht und dadurch während einer kurzen Zeit in eine den Windungen ungefähr parallele Lage kommt. Solange das Eisenbündel den Windungen parallel ist oder nur einen kleinen Winkel mit denselben bildet, ist es der magnetisirenden Wirkung der durch das Instrument gehenden Ströme entzogen. Kommt es nun nach einiger Zeit wieder in eine solche Lage, dass es einen bedeutenden Winkel mit den Windungen bildet, und also deren magnetisirenden Wirkung wieder ausgesetzt ist, so kann es vorkommen, dass die durch das decrescirende O in dem Telephon erregten Inductionsströme nicht mehr von genügender Intensität sind, um die remanente Polarität umzukehren. Infolge dessen wird das Bündel also eine gewisse Magnetisirung behalten.

Um ein sicheres Resultat zu erzielen, ist es erwünscht, das Eisenbündel senkrecht zu den Windungen zu stellen und danach die Coconfäden herunter zu lassen, bis der Zeiger auf der Hartgummideckplatte liegt.

Für kleine Abweichungen ist die Theorie des Instruments sehr einfach. Nehmen wir an, dass das Eisenbündel, wenn es senkrecht auf die Windungen gestellt ist, durch einen durch das Instrument gehenden Strom i das magnetische Moment $c_i \mu i$ bekommt. Wird es um einen Winkel γ gedreht, so wird das Moment nur $c_i \mu \cdot \cos \gamma$ sein.

Das Drehungsmoment, welches von einem Strom i ausgeübt wird auf einen Stab des magnetischen Moments 1, welcher Stab einen Winkel von $90 - \gamma$ mit der Windungsebene bildet, ist proportional $i \sin \gamma$. Das von diesem Strom auf unser Eisenbündel des magnetischen Moments $c_i \mu \cdot \cos \gamma$ ausgeübte Drehungsmoment ist also:

$$(1) \quad K = C i^2 \mu \cdot \sin \gamma \cos \gamma.$$

Bei dem Bellati'schen Dynamometer macht das Eisenbündel in der Ruhelage einen Winkel von 45° mit den Windungen. Entsteht nun durch einen durch die Windungen gehenden Strom noch eine Ablenkung α , so wird das Bündel einen Winkel $45 - \alpha$ mit einer auf der Windungsebene senkrechten Linie bilden. Um also das Drehungsmoment, welches von einem Strom i auf unser Eisenbündel ausgeübt wird, zu kennen, müssen wir in (1) den Winkel γ durch $45 - \alpha$ ersetzen:

$$K = C i^2 \mu \cdot \sin (45 - \alpha) \cos (45 - \alpha).$$

Dieses Drehungsmoment wird durch die Torsion der Aufhänge-drähte im Gleichgewicht gehalten, und da diese bei einer Bifilarsuspension dem Sinus der Ablenkung proportional ist:

$$\text{Const. } i^2 \mu \cdot \sin (45 - \alpha) \cos (45 - \alpha) = \text{Const. } \sin \alpha,$$

$$i^2 = C \frac{\sin \alpha}{\sin (45 - \alpha) \cos (45 - \alpha)} = C \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2} \cos 2\alpha},$$

$$i^2 = C \frac{\sin \alpha}{\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \alpha)}.$$

Für kleines α kann $\sin^2 \alpha$ vernachlässigt werden, und ist also:

$$i^2 = C \sin \alpha,$$

und weil ebenfalls für kleines α $\sin \alpha$ proportional $\text{tg } 2\alpha$ ist, so ist die an der Scala abgelesene Abweichung dem Quadrate der Stromintensität proportional.

Für grössere Ablenkungen müsste das Instrument graduirt werden, man würde dazu Wechselströme, wovon das

gegenseitige Intensitätsverhältniss bekannt war, durch die Windungen schicken müssen und danach eine Curve construiren. Da mir aber die Hilfsmittel zu diesem Experiment fehlten, habe ich denselben Zweck durch die Anwendung constant gerichteter Ströme zu erreichen gesucht, was mir jedoch nicht gelungen ist, weil in diesem Falle der Erdmagnetismus eine noch grössere Wirkung auf das Eisenbündel ausübt als der durch die Windungen gehende Strom selbst. Der Erdmagnetismus strebt das Bündel in die Meridianebene zu bringen und verstärkt die Wirkung der Windungen oder wirkt ihr entgegen, je nach der Richtung des durch das Instrument gehenden Stromes. Es ergab sich nun, dass nicht nur die Grösse, sondern auch die Richtung der Ablenkung sich mit der Stromesrichtung ändert. Ein Strom von $\frac{1}{130\,000}$ Ampère wurde in einer bestimmten Richtung in das Instrument geschickt, die Abweichung war 24,8 mm nach rechts. Jetzt wurde der Strom umgekehrt, die Abweichung war nun 22,8 mm nach links. Hieraus ergibt sich, dass der Erdmagnetismus eine bedeutend kräftigere Wirkung auf das Bündel ausübt als der durch die Windungen gehende Strom. Es ist folglich das Graduiren des Instrumentes auf diese Weise nicht möglich.

Man kann das Eisenbündel der erdmagnetischen Wirkung entziehen, wenn man die Windungen so combinirt, dass der Strom in der linken Hälfte des Rahmens in umgekehrter Richtung fliesst als in der rechten. Das Eisenbündel bekommt dadurch 3 Pole, z. B. einen Südpol in der Mitte und an jedem Ende einen Nordpol; bei richtiger Lage und Stärke dieser Pole wird das Bündel astatisch sein. In diesem Fall könnte man also den Apparat mittelst gleichgerichteter Ströme graduiren. Da sich aber jetzt die magnetisirenden und ablenkenden Wirkungen beider Windungshälften gegenseitig entgegenwirken, so war zu befürchten, dass das Instrument bei dieser Windungscombination viel weniger empfindlich sein würde, was sich auch in der That ergab. Es wurden die auf die in Fig. 14 angedeuteten Weise erregten Wechselströme durch das Instrument geschickt; bei der gewöhnlichen Windungscombination war die Ablenkung 155,3 mm, bei der

astatischen Magnetisirung nur 14,9 mm. Da der Apparat also im letzteren Fall viel weniger empfindlich ist, habe ich diese Idee nicht weiter verfolgt.

Es kann also das Instrument nur mittelst Wechselströme graduirt werden. Selbstverständlich kann die Bestimmung der Constante ebenso wenig mit gleichgerichteten Strömen geschehen; dieselbe kann nur gefunden werden, wenn man das Instrument mit einem Dynamometer, dessen Constante bekannt ist, in eine Leitung bringt und durch beide Apparate dieselben Wechselströme schickt.

Ich habe noch versucht, die Empfindlichkeit des Instruments durch das Einschieben zweier Eisenbündel in zwei darn befindliche horizontale Löcher des Hartgummigehäuses zu steigern. Aus der gegenseitigen Lage der Pole dieser 3 Bündel (Fig. 15) ist zu ersehen, dass die beiden Bündel *BB* das Bündel *C* senkrecht auf die Windungsebene zu bringen suchen, dass sie also der Wirkung des Stromes auf *C* zu Hülfe kommen. Es ergab sich dennoch, dass die Empfindlichkeit des Instruments durch diese Abänderung etwas kleiner wurde; die Ursache davon ist wahrscheinlich, dass der Pol N_2 durch die Nähe von N_1 , und ebenso Z_2 durch die Nähe von Z_3 etwas schwächer magnetisirt wird als vorher, wo die beiden Bündel *BB* nicht da waren. Infolge dessen wird auch die ablenkende Wirkung des Stromes auf das Bündel *C* eine geringere sein als früher. Was man also durch diese Aenderung an der einen Seite gewinnt, wird an der anderen Seite wieder verloren.

Eine bessere Einrichtung, die ich aber bis jetzt noch keine Gelegenheit zu erproben hatte, wäre die in Fig. 16 angegebene. *C* ist das aufgehängte Eisenbündel, *BB* sind die festen Bündel, *ab* ist die Ebene der Windungen, zwischen welchen *C* aufgehängt ist. Die Bündel *BB* werden gleichfalls vom Strome umkreist und erhalten die in der Figur angedeutete Magnetisirung. Kehrt die Stromesrichtung um, so ändern sich sämtliche 6 Pole, und die Richtung der Ablenkung bleibt unverändert dieselbe.

Wie wir früher gesehen, bringt der Erdmagnetismus eine ziemlich grosse Ablenkung hervor, wenn man einen

galvanischen Strom geringer Intensität durch die Windungen sendet. Dies brachte mich auf den Gedanken, zu versuchen, inwiefern das Bellati'sche Dynamometer als Galvanometer würde gebraucht werden können. Das Princip dieses Galvanometers ist ein ganz anderes als das aller anderen Galvanometer. Während bei einem gewöhnlichen Galvanometer der Erdmagnetismus der Ablenkung der Nadel entgegenwirkt, und man deshalb versucht, diesen Einfluss durch Astasiren zu verringern, wird bei meinem Instrument der Erdmagnetismus gerade dazu gebraucht, das Eisenbündel abzulenken, während der Strom ausschliesslich dazu dient, das Eisenbündel zu magnetisiren.

Zu diesem Zweck wurde das Instrument um 45° aus der Lage, worin es sich bis jetzt befand, gedreht, wodurch die Windungsebene in den magnetischen Meridian zu liegen kam. Das Eisenbündel wurde um soviel gedreht, dass der weisse Zeiger derjenigen Linie, die senkrecht auf der Windungsebene steht, parallel war, das Eisenbündel stand also senkrecht zu den Windungen und auch senkrecht zum magnetischen Meridian. Als ich nun einen Strom von 0,000 001 25 Ampère in das Instrument sandte, ergab sich eine Ablenkung von 6,7 mm, bei 1,9 m Distanz zwischen Spiegel und Scala. Obgleich dies für ein Spiegelgalvanometer keine bedeutende Empfindlichkeit genannt werden kann, ist das Resultat für einen so einfachen Apparat doch ziemlich befriedigend. Wenn man annehmen kann, dass die Steifheit der Coconfäden sich nicht bedeutend ändert, so wird die Constante dieses Instruments weniger Aenderungen ausgesetzt sein, als solches bei einem gewöhnlichen Galvanometer der Fall ist, da sich in meinem Instrument keine permanenten Magnete befinden.

Um dieses Galvanometer empfindlicher zu machen, würde man versuchen müssen, der erdmagnetischen Wirkung zu Hilfe zu kommen. Dies könnte auf sehr einfache Weise geschehen durch das Anbringen zweier permanenter Magnete, wie in Fig. 17 angegeben, wo *A* das aufgehängte Eisenbündel und *B* und *C* die festen permanenten Magnete vorstellen. Die Polarität von *A* hängt natürlicherweise ab von der

Richtung des Stromes, der durch das Instrument geht. Wenn die Magnete *B* und *C* kräftig genug sind, wird wahrscheinlich die erdmagnetische Wirkung vernachlässigt, und das Instrument in jeder beliebigen Lage bezüglich des magnetischen Meridians aufgestellt werden können. Dieses Galvanometer hat jedoch einen Nachtheil: Kupferdämpfung kann man nicht anwenden. Weil das Eisenbündel nur sehr schwach magnetisch ist, kann es durch seine Bewegung nur Dämpfungsströme geringer Intensität induciren.

Ich hatte bis jetzt noch keine Gelegenheit, das Galvanometer mit den Verstärkungsmagneten zu probiren.

Die Theorie dieses Galvanometers ohne Verstärkungsmagnete ist für kleine Ausschläge die folgende: Ist *i* der von einem Strom *i* in dem Eisenbündel inducirte Magnetismus, wenn dasselbe senkrecht auf der Windungsebene steht, so wird bei einer kleinen Ablenkung α der inducirte Magnetismus $\mu i \cdot \cos \alpha$ sein. Das vom Erdmagnetismus auf das Eisenbündel ausgeübte Kräftepaar wird dann $\text{Const.} \mu \cdot i \cdot \cos^2 \alpha$ sein, und da dasselbe durch die Torsion im Gleichgewicht gehalten wird, ist: $\text{Const.} \mu \cdot i \cdot \cos^2 \alpha = \text{Const.} \sin \alpha$.

$$i = C \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = C \frac{\text{tg } \alpha}{\cos \alpha}.$$

Für kleines α ist $\cos \alpha = 1$: $i = C \text{tg } \alpha$. Ferner kann man für ein kleines α $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{tg } 2\alpha$ nehmen, und dann ist also die an der Scala gemessene Ablenkung der Stromintensität direct proportional.

Die richtende Wirkung der Windungen auf das Eisenbündel und der von der Erde im Bündel inducirte Magnetismus sind beide proportional $\sin \alpha$ und können für ein kleines α vernachlässigt werden.

Ich kann noch hinzufügen, dass der oben beschriebene Apparat von der hiesigen Firma P. J. Kipp en Zonen zum Preise von 92 M. fabricirt und geliefert wird.

Delft, 13. Februar 1885.